Dynamische Input-Output-Modelle
Eine theoretische Analyse

Inaugural - Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Wirtschaftswissenschaften
durch den Fachbereich Wirtschafts- und Sozialwissenschaften
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von

Ulrich Meyer
aus Konitz/Westpr.

Münster 1977

Dynamische Input-Output-Modelle

Eine theoretische Analyse

I n a u g u r a l - D i s s e r t a t i o n

zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Wirtschaftswissenschaften
durch den Fachbereich Wirtschafts- und Sozialwissenschaften
der Westfälischen Wilhelms - Universität Münster

vorgelegt von

U l r i c h M e y e r

aus Konitz/Westpr.

Münster 1977

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Dekan: Prof. Dr. Meffert
Erster Berichterstatter: Prof. Dr. Schumann
Zweiter Berichterstatter: Prof. Dr. Helmstädter
Tag der mündlichen Prüfung: 13.7.1977

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Einleitung	1
Teil 1: DYNAMISCHE GLEICHGEWICHTSTHEORIE	3
Kapitel 1 Das Leontiefsche dynamische offene Input-Output-Mengenmodell	3
§ 1 Formulierung des Modells	3
§ 2 Die Partikulärlösung des Modells	7
§ 3 Die allgemeine Lösung des Modells	11
Kapitel 2 Weiterentwicklungen des Leontiefschen dynamischen offenen Input-Output-Mengenmodells	21
§ 1 Lösung von Modell 1 für reduzible Inputkoeffizientenmatrix	21
§ 2 Lösung von Modell 1 für singuläre Kapitalkoeffizientenmatrix	34
§ 3 Ein Modell mit zeitlich unverzögert wirksamem Kapazitätseffekt der Investitionen	41
§ 4 Berücksichtigung unterschiedlicher Ausreifungszeiten der Investitionen	51
§ 5 Berücksichtigung unterschiedlicher sektoraler Wachstumsraten der Endnachfrage	56
Kapitel 3 Geschlossene dynamische Input-Output-Mengenmodelle	68
§ 1 Endogenisierung der Endnachfrage	68
§ 2 Die Abhängigkeit der Lösung des Mengenmodells mit endogenisierter Endnachfrage von Wertgrößen	76
§ 3 Das allgemeine geschlossene Input-Output-Mengenmodell	8o

Seite

Kapitel 4 Zur Interpretation des dynamischen Input-Output-Mengenmodells 84

§ 1 Die zwei Arten der Instabilität des dynamischen Input-Output-Modells 85

§ 2 Das dynamische Input-Output-Modell als Gleichgewichtsmodell 88

§ 3 Ansätze zur Analyse der Ursache der Instabilität der dynamischen Input-Output-Modelle 94

Kapitel 5 Dynamische Input-Output-Preismodelle loo

§ 1 Das dynamische offene Input-Output-Preismodell mit Nullgewinnen loo

§ 2 Berücksichtigung von Gewinnen 114

§ 3 Endogenisierung des Lohnsatzes 12o

§ 4 Das allgemeine geschlossene Input-Output-Preismodell 125

Teil 2: DYNAMISCHE UNGLEICHGEWICHTSTHEORIE 129

Kapitel 6 Ungleichgewichtige Input-Output-Preismodelle 131

§ 1 Modelle mit exogenem Lohn-, Zins- und Gewinnzuschlagsatz 131

§ 2 Endogenisierung des Lohnsatzes 143

§ 3 Endogenisierung von Gewinnzuschlagsatz und Zinssatz 149

Seite

Kapitel 7 Ungleichgewichtige Input-Output-Mengenmodelle 158

§ 1 Modelle mit exogener Endnachfrage 159

§ 2 Endogenisierung der Endnachfrage 168

§ 3 Ein Modell mit endogenen Wachstumsraten 172

Anhang: Einige im Text benutzte Definitionen und Sätze 177

Literaturverzeichnis 183

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547208_0042

Einleitung

Der erste Teil dieser Arbeit befaßt sich mit dynamischen Input-Output-Modellen des von Leontief eingeführten Typs, deren Dynamik aus der Berücksichtigung des Kapazitätseffekts der Investitionen herrührt. Da die diesen Modellen zugrunde liegenden Bilanzgleichungen sich als Gleichgewichtsbedingungen interpretieren lassen, bezeichnen wir diese Modelle als Gleichgewichtsmodelle.

Einige der üblicherweise bei der Formulierung dynamischer Input-Output-Modelle unterstellten Voraussetzungen wie die der Irreduzibilität der Inputkoeffizientenmatrix, die der Invertierbarkeit der Kapitalkoeffizientenmatrix und die einer einheitlichen Ausreifungszeit aller Investitionen werden analysiert; es ergibt sich, daß ohne diese Voraussetzungen im wesentlichen die gleichen Ergebnisse abgeleitet werden können.

Die Preismodelle werden unter Einbeziehung von positiven Gewinnen formuliert, und die Beziehungen zwischen Preisen, Löhnen, Zins und Gewinn werden analysiert. Analog zur Situation bei den Mengenmodellen wird sowohl der Lohnsatz im offenen Preismodell als exogen wachsend angesetzt als auch die Preisentwicklung für ein durch Endogenisierung des Lohnsatzes geschlossenes Modell untersucht, wodurch im Gegensatz zu den herkömmlichen Input-Output-Preismodellen auch inflationäre Situationen beschrieben werden können.

Ausführlich wird die den dargestellten Modellen eigene Instabilität analysiert und der Versuch unternommen,

ihre Ursache zu ergründen. Es wird die These vertreten, daß diese (mathematische) Instabilität irrelevant ist, soweit die dynamischen Input-Output-Modelle als Gleichgewichtsmodelle interpretiert werden.

Im zweiten Teil der Arbeit werden dynamische Input-Output-Modelle untersucht, denen anstelle einer Gleichgewichtsbedingung eine Verhaltensgleichung als die zeitliche Entwicklung bestimmende Annahme zugrunde liegt. Diese Modelle lassen damit im Gegensatz zu denen aus dem ersten Teil eine Interpretation als deskriptive Modelle zu. Es ergibt sich, daß die in einem solchen Modell beschriebene ungleichgewichtige Entwicklung unter bestimmten Voraussetzungen gerade gegen die "balanced growth"-Lösung eines entsprechenden Gleichgewichtsmodells konvergiert.

Der kurze Anhang erläutert einige im Text benutzte Begriffe und enthält die (drei) für das Verständnis der Arbeit wesentlichen mathematischen Theoreme.

Teil 1: DYNAMISCHE GLEICHGEWICHTSTHEORIE

Kapitel 1 Das Leontiefsche dynamische offene Input-Output-Mengenmodell

§ 1 Formulierung des Modells

Grundlage der hier betrachteten Input-Output-Mengenmodelle sind die Bilanzgleichungen

$$(1.1) \quad x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}(t) + z_i(t) + f_i(t) \qquad i = 1,\ldots,n,$$

die zum Ausdruck bringen, daß für jeden Sektor i der n Sektoren einer Volkswirtschaft die Produktion $x_i(t)$ der Periode t gleich ist der Summe aus Vorleistungslieferungen $x_{ij}(t)$ des Sektors i an die Sektoren j (einschließlich i), den Lieferungen $z_i(t)$ an Investitionsgütern und den Lieferungen $f_i(t)$ an die Endnachfrage. Diese Gleichungen sind ex post stets erfüllt, wenn wir (auch ungeplante) Lagerbestandsveränderungen stets zu den Investitionen rechnen.

Unterstellen wir limitationale, linear homogene Produktionsfunktionen für alle Sektoren, so sind die zur Produktion $x_j(t)$ nötigen Vorleistungslieferungen oder laufenden Inputs gegeben durch

$$(1.2) \quad x_{ij}(t) = a_{ij}x_j(t) \qquad i,j = 1,\ldots,n,$$

worin a_{ij} den konstanten nichtnegativen Inputkoeffizienten an Gut i bei der Produktion von Gut j bezeichnet. Zu den laufenden Inputs wollen wir dabei stets auch den Kapitalverzehr rechnen. Damit unterstellen wir in (1.2) auch strikte Proportionalität zwischen den Reinvestitionen an Investitionsgütern aus den Sektoren 1,...,n, die zur Erhaltung eines gegebenen Kapitalbestandes in Sektor j notwendig sind, und der Ausbringung von Sektor j.

Für die Kapitalbestände an Gütern aus den Sektoren $1,\ldots,n$, die in jedem Sektor zur Produktion erforderlich sind, nehmen wir ebenfalls Proportionalität zum Output an. Eine Erhöhung der Kapazität in Sektor j um den Betrag $\Delta x_j^{Kap}(t)$ macht also (Netto-)Investitionen in Höhe von

$$(1.3) \qquad z_{ij}(t) = b_{ij}\Delta x_j^{Kap}(t) \qquad i,j = 1,\ldots,n$$

aus den Sektoren $i = 1,\ldots,n$ erforderlich. Die Koeffizienten b_{ij} bezeichnen wir als sektorale Kapitalkoeffizienten. Die Ausreifungszeit der Investitionen nehmen wir für alle Investitionsgüter einheitlich mit einer Periode an.[1] Investitionen in der Periode t gemäß (1.3) vergrößern also die Kapazität in Sektor j in der Periode $t+1$ um den Betrag $\Delta x_j^{Kap}(t)$ gegenüber der Periode t. Zu den Kapitalbeständen rechnen wir dabei auch diejenigen Bestände an laufenden Inputs, die zur Abwicklung der Produktion in der der Kapazität entsprechenden Höhe erforderlich sind, womit wir unterstellen, daß sie wie die übrigen Bestände an Kapital proportional zum Output sind.

Mit den zur Abkürzung der Schreibweise eingeführten Vektoren bzw. Matrizen

$$(1.4) \qquad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{bmatrix},$$

$$f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

---

1 In Kapitel 2, § 4 werden wir diese Annahme durch eine allgemeinere ersetzen.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} \cdots b_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ b_{n1} \cdots b_{nn} \end{bmatrix}$$

läßt sich diejenige Produktion $x(t)$, die in Periode t erforderlich ist, um die Nachfrage $f(t)$ zu befriedigen und Investitionen in der einer Kapazitätserweiterung $\Delta x^{Kap}(t)$ entsprechenden Höhe zu ermöglichen, beschreiben als

$$(1.5) \quad x(t) = Ax(t) + B\Delta x^{Kap}(t) + f(t).$$

(1.5) beschreibt für eine gegebene Endnachfrage den Zusammenhang zwischen einer Änderung der Kapazitäten und der dazu erforderlichen Produktionsmengen. Durch die Gleichsetzung von Kapazitäten und Produktionsmengen, womit

$$(1.6) \quad \Delta x^{Kap}(t) = \Delta x(t) = x(t+1) - x(t)$$

gilt, wird aus (1.5) ein Differenzengleichungssystem, das ein dynamisches Gleichgewicht beschreibt: (1.5) beschreibt dann genau alle diejenigen Zeitpfade für die Produktion $x(t)$, auf denen zu jedem Zeitpunkt volle Auslastung der Kapazitäten aller Sektoren gegeben ist.

Interpretiert man die Kapazitätsmengen als Angebot und die nach (1.5) erforderliche Produktion als Nachfrage, so sind das genau diejenigen Pfade, auf denen zu jedem Zeitpunkt das Angebot mit der Nachfrage übereinstimmt.[1]

---

1 In Kapitel 4, § 2 kommen wir auf die Frage der Interpretation zurück.

Die Lösungen des linearen Differenzengleichungssystems 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$(1.7) \quad x(t) = Ax(t) + B(x(t+1)-x(t)) + f(t)$$

hängen vom Verlauf der Endnachfrage f(t) ab. Von der Endnachfrage wollen wir in diesem ersten Modell annehmen, sie wachse mit einer exogen gegebenen Rate $w \geqslant o$:

$$(1.8) \quad f(t) = (1+w)^t f(o) \qquad \text{mit } f(o) \geqslant o.^1$$

Die Struktur der Endnachfrage bleibt also im Zeitablauf konstant, ihr Wachstum kann interpretiert werden als Ausdruck steigender Ansprüche an die Lebenshaltung oder als Folge von Bevölkerungswachstum.

Das durch (1.7) zusammen mit (1.8) beschriebene, auf Leontief[2] zurückgehende Modell wollen wir als Leontiefsches dynamisches offenes Input-Output-Mengenmodell, oder kurz als Modell 1 bezeichnen. Alle seine Variablen stellen reale Größen dar, wobei wir von der Fiktion homogener Güter 1 bis n ausgehen, die von den einzelnen Sektoren erzeugt werden und gleichermaßen als laufender Input, Investition oder Endverbrauch Verwendung finden können.

Die Matrix E-A wollen wir als Leontief-Matrix bezeichnen und annehmen, daß alle Eigenwerte der Inputkoeffizienten-Matrix A dem Betrage nach kleiner sind als 1 (vgl. dazu Satz A.5 im Anhang). Weiter wollen wir A in Modell 1 wie in der gesamten Arbeit, soweit nicht ausdrücklich anders erwähnt[3], als irreduzibel[4] voraussetzen.

---

1 Zur Bedeutung des Zeichens "$\geqslant$" für Vektoren und Matrizen vgl. den Punkt A.1 im Anhang.

2 Vgl. Leontief [18]. Unabhängig davon wurde es ähnlich entwickelt von Hawkins [9] und Holley [8].

3 Etwa in Kapitel 2, § 1 und § 5.

4 Zum Begriff der Irreduzibilität vgl. Kapitel 2, § 1.

Von der Matrix B der sektoralen Kapitalkoeffizienten werden wir der Einfachheit halber stets[1] annehmen, sie sei invertierbar. Das Differenzengleichungssystem (1.7/8) läßt sich dann nach x(t+1) auflösen und als

$$(1.9) \quad x(t+1) = (E + B^{-1}(E-A))x(t) - B^{-1}f(t)$$

schreiben.

§ 2 Die Partikulärlösung des Modells

Ableitung der Partikulärlösung. Als Lösung von Modell 1 wollen wir jeden Produktionsmengenpfad x(t) bezeichnen, der das Differenzengleichungssystem (1.9) erfüllt. Ökonomisch sinnvoll sind davon nur diejenigen, für die 1. $x(t) \geqslant o$ für alle t gilt und 2. negative Werte für $\Delta x(t)$ - das impliziert wegen der im Modell unterstellten Gleichzeit von Produktion und Kapazität negative Nettoinvestitionen - nur in einer Höhe vorkommen wie sie durch unterlassene Reinvestitionen möglich sind. Wir werden uns stets auf die Überprüfung der ersten Bedingung beschränken, da diese, wie sich aus der Analyse der Lösungen ergeben wird, im wesentlichen für die Lösungspfade der Modelle mit der 2. gleichbedeutend ist.

Unter der Partikulärlösung eines inhomogenen Differenzengleichungssystems wollen wir eine Lösung verstehen, die vom Typ des Inhomogenitätsterms ist. Für Modell 1 bedeutet das eine Lösung der Form

$$(1.10) \quad \bar{x}(t) = (1+w)^t \bar{x}(o).$$

---

1 Bis auf Kapitel 2, § 2, wo wir die Konsequenzen des Fehlens dieser Voraussetzung prüfen werden.

Durch Einsetzen der aus (1.9) resultierenden Beziehung $\bar{x}(1) = (1+w)\,\bar{x}(o)$ in (1.9) erhält man

$$(1.11) \quad \bar{x}(o) = A\bar{x}(o) + wB\bar{x}(o) + f(o)$$

und damit

$$(1.12) \quad \bar{x}(o) = (E-A-wB)^{-1} f(o).$$

Sofern die in (1.12) auftretende Matrix existiert,stellt (1.1o/12)damit die Partikulärlösung von Modell 1 dar. Sie ist somit stets eindeutig bestimmt. Bevor wir die Bedingungen der Existenz einer nichtnegativen Partikulärlösung prüfen, wollen wir den für die dynamische Input-Output-Theorie zentralen Satz 1.1 über Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $B^{-1}(E-A)$ beweisen.

Satz 1.1: (i) $B^{-1}(E-A)$ besitzt einen positiven Eigenwert λ_1 der Vielfachheit 1,dessen zugehöriger Eigenvektor e_1 positiv ist.

(ii) λ_1 ist dem Betrage nach kleiner als alle anderen Eigenwerte von $B^{-1}(E-A)$.

(iii) e_1 ist der einzige nichtnegative Eigenvektor von $B^{-1}(E-A)$.

Beweis: Da die Eigenwerte von A als dem Betrage nach kleiner als 1 und A als irreduzibel vorausgesetzt sind, existiert nach dem Theorem über die Invertierbarkeit von Leontief-Matrizen $(E-A)^{-1}$ und ist größer als Null (vgl. Anhang, Satz A.5, (IV) $\Rightarrow$ (VII)). Da $B \geqslant o$ ist und aufgrund der vorausgesetzten Invertierbarkeit in jeder Spalte mindestens ein von o verschiedenes Element besitzt, ist damit auch $S = (E-A)^{-1}B > o$. Nach dem Theorem von Frobenius (Satz A.6) besitzt S dann einen positiven Eigenwert μ_1 der Vielfachheit 1, dessen zugehöriger Eigenwert e_1 positiv ist.[1] μ_1 ist der dem Betrage nach größte Eigen-

1 Den nach dem Theorem von Frobenius existierenden betragsgrößten Eigenwert einer nichtnegativen Matrix A werden wir im folgenden jeweils kurz als maximalen Eigenwert von A bezeichnen.

wert von S und e_1 der einzige nichtnegative Eigenvektor von S.

Da S^{-1} gerade $B^{-1}(E-A)$ ist und $1/\mu_i$ die Eigenwerte von S^{-1} sind, wenn μ_1 die Eigenwerte von S sind, wobei die zu $1/\mu_i$ und μ_i gehörigen Eigenvektoren übereinstimmen, ist die Behauptung damit bewiesen.//

Damit können wir die Frage nach der Existenz der Partikulärlösung in folgendem Satz beantworten:

Satz 1.2: (i) Für $w<\lambda_1$ existiert $(E-A-wB)^{-1}$ und es gilt $(E-A-wB)^{-1} > o$; für beliebiges $f(o) \geqslant o$ ist die Struktur $\bar{x}(o)$ der Partikulärlösung damit positiv.

(ii) Für $w>\lambda_1$ existiert für keine Endnachfragestruktur $f(o) \geqslant o$ eine nichtnegative Partikulärlösung.

Beweis: Es sei e_1 der Eigenvektor von μ_1 zur Matrix $(E-A)^{-1}B$. Dann folgt aus

$$(1.13) \quad (E-A)^{-1}Be_1 = \mu_1 e_1:$$

$$(1.14) \quad (A+\lambda_1 B)e_1 = e_1$$

e_1 ist damit Eigenvektor zum Eigenwert 1 der Matrix $A+\lambda_1 B$. Dieser Eigenwert ist aber der maximale Eigenwert der nichtnegativen, irreduziblen Matrix $A+\lambda_1 B$, da nach dem Theorem von Frobenius nur dieser einen nichtnegativen Eigenvektor besitzt. Nach dem Satz über Abschätzungen für den maximalen Eigenwert (Satz A.7) gilt dann für den maximalen Eigenwert $\varrho(w)$ der Matrix $A+wB$:

$$(1.15) \quad \varrho(w) \lesseqgtr 1 \quad \text{genau dann, wenn} \quad w \lesseqgtr \lambda_1.$$

Für $w<\lambda_1$ folgt damit aus dem Theorem über die Invertierbarkeit von Leontief-Matrizen (Satz A.5,(IV) $\Rightarrow$ (VII)) die Existenz und Positivität von $(E-A-wB)^{-1}$, und damit ist (i) bewiesen.

Zum Beweis von (ii) nehmen wir - im Gegensatz zur Behauptung - an, es gäbe für $w\geq\lambda_1$ Vektoren $\bar{x}(o)\geq o$ und $f(o)\geq o$ mit

(1.16) $\quad (E-A-wB)\bar{x}(o) = f(o).$

Nach Satz A.5,(VIII) $\Rightarrow$ (IV) würde dann $\zeta(w)<1$ folgen, im Widerspruch zu (1.15). //

Diskussion der Partikulärlösung. 1. Nach Satz 1.2 existiert für $w\geq\lambda_1$ keine nichtnegative Partikulärlösung. Im nächsten Paragraphen werden wir zeigen (vgl. Satz 1.3), daß für $w\geq\lambda_1$ überhaupt keine nichtnegative Lösung von Modell 1 existiert. λ_1 stellt damit eine obere (nicht erreichbare) Grenze für das nach Modell 1 mögliche Wachstum der Endnachfrage dar. Diese Grenze hängt von den durch A und B repräsentierten Produktionsbedingungen ab, nicht dagegen von Höhe oder Struktur der Endnachfrage f(o).

2. Für eine gegebene Endnachfrage f(o) in der Periode o läßt sich jedes Wachstums mit einer Rate $w<\lambda_1$ in Modell 1 realisieren. Die dazu nach (1.12) in der Periode o erforderlichen Produktionsmengen $\bar{x}(o)$ hängen in Struktur und Größe von w ab. Allgemein gilt, $\bar{x}(o)$ ist umso größer, je größer w ist, wie man der Darstellung

$$(1.17)\quad \bar{x}(o) = (E-A-wB)^{-1}f(o) = \sum_{\nu=0}^{\infty}(A+wB)^{\nu}\ f(o)$$

(vgl. Satz A.5, 3.) entnimmt. Einer höheren Wachstumsrate entspricht also ein geringerer Anteil der Endnachfrage am gesamten Produktionswert.

§ 3 Die allgemeine Lösung des Modells

Lösung des homogenen Teils von Modell 1. Die allgemeine Lösung eines linearen Differenzengleichungssystems läßt sich angeben als Summe irgendeiner speziellen Lösung des inhomogenen Systems und der allgemeinen Lösung des homogenen Systems. Das zu Modell 1 gehörige homogene System lautet

$$(1.18) \quad x(t+1) = (E + B^{-1}(E-A))x(t).$$

Sind λ_i und e_i für i=1,...,n die Eigenwerte und Eigenvektoren von $B^{-1}(E-A)$, wobei λ_1 wie bisher den dem Betrage nach kleinsten Eigenwert bezeichne, so läßt sich die allgemeine Lösung x(t) von (1.18) anschreiben als Linearkombination der sogenannten Basislösungen $(1+\lambda_i)^t e_i$:

$$(1.19) \quad x(t) = \sum_i \alpha_i (1+\lambda_i)^t e_i . \quad [1]$$

In den Koeffizienten α_i der Basislösungen kommen dabei die n Freiheitsgrade der Lösung zum Ausdruck. Sind alle Eigenwerte reell, so stellt (1.19) für beliebige reelle Zahlen α_i eine reelle Lösung von (1.18) dar. Treten unter den Eigenwerten auch (echt) komplexe Zahlen auf (dann stets als Paare konjugiert komplexer Zahlen $\lambda_i = a+bi$, $\lambda_{i+1} = a-bi$), so sind auch die zugehörigen Eigenvektoren komplexwertig und

---

1 Um die Diskussion nicht unnötig zu komplizieren, wollen wir hier wie auch stets im folgenden davon ausgehen, daß die Eigenwerte sämtlich voneinander verschieden sind, daß die charakteristische Gleichung, als deren Wurzeln die Eigenwerte bestimmt sind, also in Linearfaktoren zerfällt. Für empirisch ermittelte Matrizen wäre eine Mehrfachwurzel gewissermaßen nur rein zufällig möglich; durch "Einbeziehung von mehr Stellen hinter dem Komma" würden aus einer Mehrfachwurzel mehrere Einfachwurzeln. An den abgeleiteten Ergebnissen würde sich im übrigen bei Berücksichtigung von Mehrfachwurzeln nichts ändern, da der für die Lösung entscheidende Eigenwert λ_1 nach Satz 1.2 notwendigerweise einfach ist.

reelle Koeffizienten α_i, α_{i+1} ($\neq o$) würden in (1.19) zu komplexen Werten für x(t) führen. Es läßt sich jedoch zeigen[1], daß in diesem Fall eine geeignete Wahl der Koeffizienten α_i, α_{i+1} als komplexe Zahlen dazu führt, daß die Summe

$$(1.2o) \qquad \alpha_i (1+\lambda_i)^t e_i + \alpha_{i+1} (1+\lambda_{i+1})^t e_{i+1}$$

für alle t einen reellwertigen Vektor ergibt. Da auch dabei jeweils 2 (reelle) Freiheitsgrade in der Wahl der Koeffizienten α_i, α_{i+1} bestehen, stellt (1.19) also auch für den Fall des Vorkommens komplexer Eigenwerte eine n-dimensionale reelle Lösungsmannigfaltigkeit von (1.18) dar.

Die einzelnen Komponenten 1 bis n des Summenvektors (1.2o) stellen Sinusschwingungen dar, deren Amplitude gemäß r_i^t wächst (oder abnimmt) und deren Schwingungsdauer T_i sich aus $T_i = 2\pi/\varphi_i$ bestimmt, wo r_i der Betrag von $1+\lambda_i$ (= Betrag von $1+\lambda_{i+1}$) ist und φ_i der Winkel zwischen dem Ursprungsstrahl durch $1+\lambda_i$ und der reellen Achse in der Gaußschen Zahlenebene bezeichnet:

$$(1.21) \qquad 1+\lambda_i = r_i (\cos \varphi_i + i \sin \varphi_i).$$

Soweit im folgenden von Eigenwerten λ_i und der zugehörigen Basislösung die Rede ist, sind für komplexe Eigenwerte stets die Paare konjugiert komplexer Eigenwerte gemeinsam zu betrachten und anstelle der Basislösung der Summenvektor (1.2o).

---

1 Vgl. ein beliebiges Buch über lineare Differenzen- oder Differentialgleichungen.

Nichtnegative Lösungen. Im Fall $w<\lambda_1$ existiert nach Satz 1.2 eine nichtnegative Partikulärlösung $\bar{x}(t)$ und die allgemeine Lösung $x(t)$ ist damit die Summe aus (1.1o/12) und (1.19):

$$(1.22) \quad x(t) = (1+w)^t\bar{x}(o) + \sum_i \alpha_i(1+\lambda_i)^t e_i .$$

Für $w\geq\lambda_1$ gibt es nach Satz 1.2 keine nichtnegative Partikulärlösung (der Form $\bar{x}(t) = (1+w)^t\bar{x}(o)$). Damit ist noch nicht gezeigt, daß für $w\geq\lambda_1$ überhaupt keine nichtnegative Lösung existiert. Wir beweisen daher den folgenden Satz, der im Hinblick auf spätere Anwendungen etwas allgemeiner formuliert ist (Teil (ii) und (iii) in Satz 1.3), als es an dieser Stelle von der ökonomischen Aussage her erforderlich wäre.

Satz 1.3: (i) Für $w\geq\lambda_1$ existiert keine für alle t nichtnegative Lösung von Modell 1.

(ii) Jede Lösung von Modell 1 wächst asymptotisch mit mindestens der Rate w.

(iii) Zu jedem $w\geq o$ gibt es eine Lösung von Modell 1, die asymptotisch mit der Rate w wächst.

Beweis: 1. Wegen

$$(1.23) \quad (E-A-wB)x = o \quad \text{genau dann, wenn} \quad B^{-1}(E-A) = wx$$

existiert $(E-A-wB)^{-1}$ genau dann, wenn w von allen Eigenwerten $\lambda_i, i=1,\ldots,n$ von $B^{-1}(E-A)$ verschieden ist. Für $w\neq\lambda_i$ existiert also die Partikulärlösung (1.1o). Die Behauptungen des Satzes lassen sich damit an der allgemeinen Lösung (1.22) ablesen, da alle e_i für $i=2,\ldots,n$ nach Satz 1.1,(iii) negative Komponenten haben und nach Satz 1.2,(ii) die Partikulärlösung für $w\geq\lambda_1$ ebenfalls notwendigerweise negative Komponenten hat.

2. Sei jetzt $w=\lambda_i$ für ein $i=1,\ldots,n$. In diesem Fall machen wir den Ansatz

$$(1.24) \quad x(t) = (1+w)^t\,(\bar{x}+t\bar{\bar{x}}),$$

um eine spezielle Lösung des inhomogenen Differenzengleichungssystems (1.9) zu erhalten. Durch Einsetzen von (1.24) in (1.9) erhält man (nach einigen Umformungen):

$$(1.25) \quad t(E-A-wB)\bar{\bar{x}} + (E-A-wB)\bar{x} = f(o) + (1+w)B\bar{\bar{x}}.$$

Da (1.25) für alle t gelten soll, können wir es auflösen in die beiden Gleichungssysteme

$$(1.26) \quad (E-A-wB)\bar{\bar{x}} = o \qquad \text{und}$$

$$(1.27) \quad (E-A-wB)\bar{x} = f(o) + (1+w)B\bar{\bar{x}}.$$

Setzen wir $\bar{\bar{x}}=\gamma e_i$, so ist (1.26) nach (1.23) erfüllt. Dadurch daß man γ geeignet wählt, wird (1.27), obwohl der Rang von (E-A-wB) nur n-1 ist, (eindeutig) lösbar.

Mit den so bestimmten Werten für γ und $\bar{x}$ stellt (1.24) eine spezielle Lösung von (1.9) dar, und wir können die allgemeine Lösung damit angeben als:

$$(1.28) \quad x(t) = (1+w)^t\bar{x} + \gamma e_i t(1+w)^t + \sum_{1} \alpha_i(1+\lambda_i)^t e_i.$$

Die Aussagen des Satzes lassen sich jetzt wieder aus (1.28) ablesen. Für $w=\lambda_1$ ist dabei noch zu zeigen, daß $\gamma<o$ gelten muß. Nehmen wir dazu an, es gelte $\gamma\geq o$, also $\bar{\bar{x}}=\gamma e_1\geq o$. Dann wäre die rechte Seite von (1.27) $\geq o$. Anstelle von (1.27) können wir offenbar auch schreiben

$$(1.29) \quad (E-A-wB)(\bar{x}+\delta e_1) = f(o) + (1+w)B\bar{\bar{x}} \geq o$$

mit beliebigem reellen δ. Für hinreichend großes δ wird $\bar{x}+\delta e_1$ aber positiv, woraus nach Satz A.5, (VII) $\Rightarrow$ (I) die Invertierbarkeit von (E-A-wB) folgen würde im Widerspruch zu (1.23).//

Wir können uns also auf die Diskussion der allgemeinen Lösung (1.22) beschränken. Kurzfristig, d.h. für kleine t, sind die Gewichte, wie sie durch die Koeffizienten α_i zum Ausdruck kommen[1], mit denen die einzelnen Basislösungen in der Ausgangssituation vertreten sind, bestimmend für den Verlauf von (1.22). Langfristig, d.h. für große t, geht dagegen von demjenigen (von o verschiedenen) Summanden in (1.22) ein dominierender Einfluß aus, dessen Wachstumsfaktor $1+\lambda_i$ (bzw. 1+w) dem Absolutbetrage nach am größten ist.

Da lediglich $\bar{x}(o)$ und e_1 ausschließlich aus nichtnegativen Komponenten bestehen, kann eine Lösung nur dann für alle t nichtnegativ sein, wenn

- für $\alpha_1=o$: $\alpha_i=o$ für alle i mit $|1+\lambda_i| > 1+w$,
- für $\alpha_1\neq o$: $\alpha_i=o$ für alle i mit $|1+\lambda_i| > 1+\lambda_1$ ist.

Jede nichtnegative Lösung von Modell 1 mit $\alpha_1=o$ stimmt damit mit der Partikulärlösung überein, falls keine Eigenwerte λ_i mit $|1+\lambda_i|\leq 1+w$ existieren, oder stellt eine Überlagerung dieses Pfades durch Basislösungen $\alpha_i(1+\lambda_i)^t e_i$ mit $|1+\lambda_i|\leq 1+w$ dar. Bis auf den Fall des Vorkommens eines Eigenwertes λ_i mit $|1+\lambda_i| = 1+w$

---

1 Da die Eigenvektoren nur bis auf ein Vielfaches bestimmt sind, sind auch die Koeffizienten α_i nicht eindeutig bestimmt und somit nicht unmittelbar als Gewichtungskoeffizienten interpretierbar. Das läßt sich aber durch eine geeignete Normierungsvorschrift für die Eigenvektoren erreichen, etwa durch die Bedingung $\|e_i\| = 1$, wo $\|.\|$ die euklidische Norm oder die Absolutbetragsnorm bedeuten kann.

konvergiert die Struktur jeder solchen Lösung dabei gegen die Struktur der Partikulärlösung, während für $|1+\lambda_i| = 1+w$ Schwingungen mit nicht relativ abnehmender Amplitude um die Partikulärlösung herum möglich sind. Das Ausmaß der Überlagerung der Partikulärlösung, das für eine ökonomisch zulässige Lösung möglich ist, wird dabei durch die Bedingung begrenzt, daß für kein t ein sich ergebender Rückgang der Produktion (= Kapazität) größer ist als es der Unterlassung von Reinvestitionen entspricht.

Im Fall $\alpha_1 \neq o$ überwiegt wegen $w<\lambda_1$ für große t der Einfluß der Basislösung zu λ_1, so daß die Struktur einer entsprechenden Lösung gegen die durch den Eigenvektor e_1 gegebene Struktur konvergiert oder, falls für einen Eigenwert $\lambda_i (\neq \lambda_1)$ $|1+\lambda_i| = 1+\lambda_1$ gilt, periodische Schwingungen um diese Struktur ausführt. Da das Wachstum der Produktion damit langfristig über dem der Endnachfrage liegt, wird der Anteil der Endnachfrage an der Produktion immer kleiner und konvergiert schließlich gegen null.

Es existieren also zwei Typen von nichtnegativen Lösungen: Zum einen die Partikulärlösung, gegebenenfalls überlagert durch Basislösungen zu Eigenwerten λ_i mit $|1+\lambda_i| \leq 1+w$, zum anderen Lösungen

$$(1.3o) \quad x(t) = (1+w)^t \bar{x}(o) + \alpha_1 (1+\lambda_1)^t e_1$$

mit $\alpha_1 \neq o$, ebenfalls eventuell überlagert durch andere Basislösungen zu Eigenwerten λ_i mit $|1+\lambda_i| \leq 1+\lambda_1$.

Von allen Lösungen hat nur die (reine, nicht überlagerte) Partikulärlösung die Eigenschaft, daß für sie die Struktur der Volkswirtschaft, wie sie in der Struktur des Produktionsmengenvektors x(t) und dem Verhältnis der Produktion zur Endnachfrage zum Ausdruck kommt,

konstant bleibt. Wir wollen sie daher im folgenden als die Gleichgewichtslösung oder den Gleichgewichtspfad von Modell 1 bezeichnen und entsprechend λ_1 und die zu λ_1 gehörige Basislösung als die gleichgewichtige Wachstumsrate bzw. den gleichgewichtigen Wachstumspfad des homogenen Teils von Modell 1. Die Eigenschaft "gleichgewichtig" meint in diesem Zusammenhang also eine Entwicklung im Sinne eines balanced growth. Demgegenüber sind alle ökonomisch zulässigen Lösungen des (Gleichgewichts-)Modells 1 gleichgewichtig im Sinne einer vollen Auslastung der Kapazitäten.

Lösung zu gegebenen Anfangswerten. Um die Frage zu beantworten, welchen Verlauf die Lösung des Differenzengleichungssystems (1.9) bei gegebener Ausgangssituation, also einem gegebenen Vektor x(o), nimmt, ist die allgemeine Lösung (1.22) so zu spezifizieren, daß ihr Wert für t=o gerade den Vektor x(o) ergibt. Die Koeffizienten α_i sind demnach so zu bestimmen, daß gilt:

$$(1.31) \quad x(o) = \bar{x}(o) + \sum_i \alpha_i e_i .$$

Ist T die Matrix, die aus den Eigenvektoren $e_1,\ldots,e_n$ besteht, bestimmt sich der Koeffizientenvektor $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)'$ also aus dem linearen Gleichungssystem

$$(1.32) \quad T\alpha = x(o) - \bar{x}(o).$$

Da Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig voneinander sind, hat T den Rang n und zu gegebenen Anfangswerten x(o) ist die Lösung des Differenzengleichungssystems (1.9) damit eindeutig bestimmt.[1]

---

1 Diese Eindeutigkeitsaussage gilt auch unabhängig von der hier (der Einfachheit halber) gemachten Annahme der Verschiedenheit der Eigenwerte.

Beim Vorkommen von komplexen Eigenwerten - und damit komplexen Eigenvektoren - ist T eine komplexe Matrix, (1.32) also ein Gleichungssystem in komplexen Zahlen. Anstelle von (1.32) läßt sich auch ein reelles Gleichungssystem verwenden, indem man für je zwei konjugiert komplexe Eigenwerte $\lambda_i, \lambda_{i+1} = a \pm bi$ die zugehörigen Eigenvektoren e_i, e_{i+1} ersetzt durch zwei Basisvektoren der zu λ_i, λ_{i+1} gehörenden reellen Eigenebene, das heißt durch Vektoren $\tilde{e}_i, \tilde{e}_{i+1}$, die die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
B^{-1}(E-A)\tilde{e}_i &= a\tilde{e}_i + b\tilde{e}_{i+1} \\
B^{-1}(E-A)\tilde{e}_{i+1} &= -b\tilde{e}_i + a\tilde{e}_{i+1}
\end{aligned}
\tag{1.33}
$$

erfüllen. Aus den sich mit dem dann reellen Gleichungssystem (1.32) ergebenden Koeffizienten γ_i und γ_{i+1} lassen sich die Parameter der durch den Summanden (1.2o) der allgemeinen Lösung verursachten Sinusschwingungen bestimmen.

Stabilität. Eine nichtnegative Partikulärlösung von Modell 1 ist nie relativ stabil[1], da die Bedingung für ihre Existenz: $w < \lambda_1$ unvereinbar ist mit der Bedingung

$$
|1+\lambda_i| < 1+w \quad \text{für alle} \quad i=1,\ldots,n, \tag{1.34}
$$

die - wie man der allgemeinen Lösung (1.22) entnimmt - ihre relative Stabilität bedeuten würde.

Relative Stabilität des 2. Typs nichtnegativer Lösungen bedeutete, daß jede Lösung von Modell 1 gegen die Gleichgewichtslösung des homogenen Teils konvergiert. Das ist ebenfalls sicherlich nie gegeben, da die Partikulärlösung diese Bedingung nicht erfüllt. Sinnvoll ist daher nur die Frage nach relativer Stabilität

---

1 Zum Begriff der relativen Stabilität vgl. Definition A.4 im Anhang.

dieser nichtnegativen Lösungen vom 2. Typ unter denjenigen Lösungen mit $\alpha_1 > o$, also anders ausgedrückt: die Frage nach der Stabilität der Basislösung zum Eigenwert λ_1 in einem homogenen Modell. Diese Stabilität ist nach (1.22) (mit $\bar{x}(o)=o$) genau dann gegeben, wenn alle Eigenwerte λ_i für i=2,...,n die Bedingung

$$(1.35) \qquad |1+\lambda_i| < 1+\lambda_1$$

erfüllen. Abbildung 1 stellt das Gebiet der komplexen Zahlenebene, innerhalb dessen alle Eigenwerte $\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ dazu liegen müssen, graphisch als schraffierte Fläche dar.

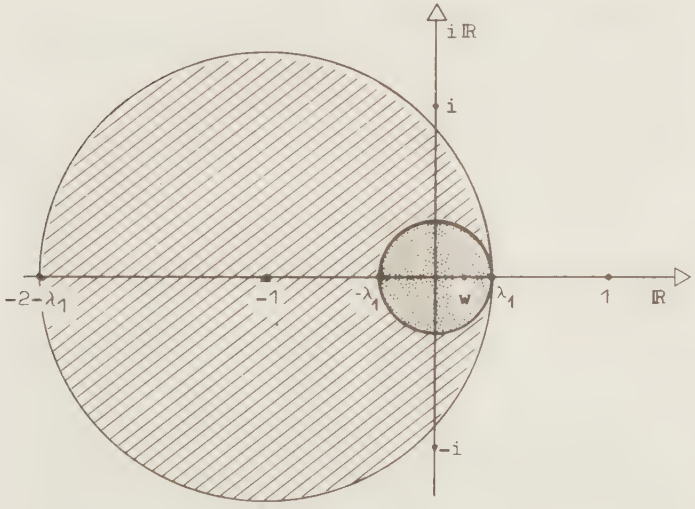

Abbildung 1: Stabilitätsgebiet für Modell 1

Da $|1+\lambda_i| = |(-1)-\lambda_i|$ der Abstand zwischen den Punkten -1 und λ_i ist, ergibt sich das Gebiet als Kreis um den Punkt -1 mit dem Radius $1+\lambda_1$, wobei wir den kleinen Kreis in Abbildung 1 ausschließen können, da λ_1 stets der dem Betrage nach kleinste Eigenwert unter den λ_i ist.

Theoretisch betrachtet, besteht also die Möglichkeit, daß "fast alle" ($\alpha_1 > o$) Lösungen gegen eine Basislösung zum Eigenwert λ_1 konvergieren. Die empirischen Ergebnisse, die bisher zur dynamischen Input-Output-Analyse vorliegen[1], lassen jedoch erkennen, daß diese theoretische Möglichkeit in der Praxis nicht zutrifft, sondern die Regel sogar vollständige Instabilität[2] ist. Das bedeutet, daß die Lösung für einen empirisch gegebenen Anfangswert x(o), für den sich aus (1.32) stets Koeffizienten $\alpha_i \neq o$ für alle i ergeben dürften, stets zu negativen Produktionsmengen führt, also ökonomisch unzulässig ist. Wir werden auf die Interpretation dieses Resultats in Kapitel 4 zurückkommen.

---

1 Vgl. dazu etwa Leontief [17, S. 5-15, S. 16o f], Tsukui [41, S. 178 f], Meyer und Schumann [26, S. 2o].

2 Mit vollständiger Instabilität ist gemeint, daß alle Eigenwerte λ_i, i=2,...,n die Bedingung (1.35) verletzen.

Kapitel 2 Weiterentwicklungen des Leontiefschen dynamischen offenen Input-Output-Mengenmodells

In diesem Kapitel wollen wir einige der in Kapitel 1 gemachten Voraussetzungen aufheben und die sich daraus ergebenden Konsequenzen für die Lösbarkeit und den Verlauf von Lösungen analysieren. Bis auf die jeweils angezeigten Änderungen legen wir dabei die Zusammenhänge von Modell 1 zugrunde. Unsere Konzeption ist dabei wie in Kapitel 1, nichtnegative Lösungen zu suchen, die in jeder Periode die Gleichgewichtsbedingung "Kapazitätsmengen = Produktion" erfüllen.

§ 1 Lösung von Modell 1 für reduzible Inputkoeffizientenmatrix

Die Irreduzibilität von A geht an zwei Stellen in die Beweisführung des vorigen Kapitels ein[1]. Zum einen folgt aus ihr die Positivität von $(E-A)^{-1}B$ und damit ist der Eigenvektor e_1 positiv und der einzige nichtnegative Eigenvektor von $(E-A)^{-1}B$ (Satz 1.1), was für die Eindeutigkeitsaussagen über die allgemeine Lösung (etwa Satz 1.3 (i)) von Belang ist. Zum anderen geht die Irreduzibilität von A ein in den Beweis der Aussage von Satz 1.2,(i) und (ii) über die Partikulärlösung. Wir werden in diesem Paragraphen zeigen, daß im Falle einer reduziblen (aber nicht vollständig reduziblen) Produktionsstruktur bei gewissen, ökonomisch unmittelbar plausiblen Mindestanforderungen an die Endnachfragestruktur im wesentlichen dieselben Ergebnisse wie für eine irreduzible Produktionsstruktur ableitbar sind.

---

1 An beiden Stellen ließen sich die entsprechenden Aussagen (zumindest für $w > o$) auch aus der Annahme einer irreduziblen Kapitalkoeffizientenmatrix B ableiten. Das stellt jedoch im Rahmen des hier benutzten Konzepts der Input- und Kapitalkoeffizienten keine Verallgemeinerung dar: Da die Inputkoeffizienten a_{ij} die Reinvestitionen mit umfassen, gilt der Zusammenhang "$b_{ij} \neq o \Rightarrow a_{ij} \neq o$". Daher ist mit B auch stets A irreduzibel.

Der Begriff der Irreduzibilität.[1] Eine (n×n)-Matrix $A = (a_{ij})$ heißt irreduzibel (oder unzerlegbar), wenn es zu jedem Paar von Indizes (i,j) mit $1 \leq i,j \leq n$, $i \neq j$ eine Folge von Koeffizienten $a_{i_1 i_2}, a_{i_2 i_3}, \ldots, a_{i_{m-1} i_m}$ mit $i_1 = i$, $i_m = j$ gibt, die sämtlich von Null verschieden sind; andernfalls heißt sie reduzibel (oder zerlegbar). Für eine Inputkoeffizientenmatrix A bedeutet ein von Null verschiedener Koeffizient a_{ij} direkte, und damit eine Folge wie oben: indirekte Lieferungen von Sektor i an Sektor j. Eine Inputkoeffizientenmatrix ist also irreduzibel, wenn direkt oder indirekt jeder Sektor für jeden anderen Vorleistungen erbringt (oder damit äquivalent: wenn jeder Sektor direkt oder indirekt von jedem anderen Sektor Vorleistungen benötigt). Irreduzibilität von A bedeutet damit vollständige Interdependenz, Reduzibilität dagegen (teilweise) Dependenz der durch A beschriebenen Produktionsstruktur.[2,3]

1 Vgl. dazu etwa Gantmacher [6, S. 46 ff] oder Takayama [4o, S. 37o ff].

2 Die Eigenschaft der Reduzibilität bzw. Irreduzibilität ist also verwandt mit dem Begriffspaar lineare bzw. zirkuläre Produktionsstruktur. Vgl. dazu etwa Helmstädter [1o].

3 Die meisten empirischen Input-Output-Tabellen haben einen irreduziblen Vorleistungsverflechtungsteil. Das bedeutet jedoch nicht notwendig, daß die zugrunde liegende Produktionsstruktur tatsächlich vollständig interdependent ist. Die in den Tabellen zum Ausdruck kommende Irreduzibilität könnte vielmehr zwei andere Ursachen haben. Zum einen ist dabei der Aggregationsgrad zu nennen: Während aus der Irreduzibilität einer stark disaggregierten Tabelle die einer daraus gewonnenen aggregierten folgt, ist das umgekehrte nicht der Fall; es könnte also sein, daß bei steigendem Disaggregationsgrad aus interdependent erscheinenden Produktionsstrukturen (teilweise) dependente Strukturen werden. Zum anderen könnte die bei der Tabellenerstellung angewandte Methode der Sektorenabgrenzung, also das zur Verbuchung von Inputs und Outputs für Nebenprodukte angewandte Verfahren, der Grund für eine sich ergebende Irreduzibilität sein.

Zerlegung in Irreduzibilitätskomponenten. Ist die Inputkoeffizientenmatrix A reduzibel, so gibt es Sektoren i und j, so daß der Sektor i weder direkt noch indirekt an den Sektor j liefert. Bezeichnen wir mit I die Menge bestehend aus Sektor i und allen Sektoren, an die i überhaupt direkt und indirekt liefert, und mit J die Menge der übrigen Sektoren, so sind I und J nicht leer und es gilt, daß kein Sektor aus I einen Sektor aus J beliefert. Numerieren wir die Sektoren so, daß die Sektoren aus J die Nummern $1,\ldots,m$ erhalten und die Sektoren aus I die Nummern $m+1,\ldots,n$, so bedeutet das, daß A die Form

$$(2.1) \qquad A = \begin{bmatrix} A^{11} & A^{12} \\ 0 & A^{22} \end{bmatrix}$$

hat, wo A^{11} und A^{22} quadratische Untermatrizen der Ordnung n bzw. n-m sind.

Die (nicht notwendig quadratische) Untermatrix A^{12} in (2.1) kann aus Nullen oder aus von o verschiedenen Elementen bestehen. Läßt sich - durch Umnumerierung der Sektoren - eine Zerlegung von A in der Form von (2.1) finden, so daß auch $A^{12} = o$ ist, so bezeichnet man A als vollständig reduzibel oder sagt, A zerfalle in die Untermatrizen A^{11} und A^{22}. Für die durch A beschriebene Produktionsstruktur bedeutet das, daß zwei Gruppen von Sektoren existieren, die in ihrer Produktion völlig unabhängig voneinander sind. Da in diesem Fall die durch die beiden Gruppen gegebenen Teilsysteme einzeln analysiert werden können, genügt es zur Analyse der Produktionsstruktur, sich auf nicht vollständig reduzible Systeme zu beschränken. Im folgenden sei daher stets A nicht vollständig reduzibel.

Sind die in (2.1) auf der Hauptdiagonalen stehenden Untermatrizen noch nicht irreduzibel, so lassen sie sich wieder in einer (2.1) entsprechenden Form zerlegen. Fährt man auf diese Weise mit allen sich ergebenden Hauptdiagonal-Untermatrizen fort, so gelangt man schließlich zu einer Zerlegung von A in eine Blockmatrix, deren sämtliche Hauptdiagonal-Untermatrizen irreduzibel sind:[1]

$$(2.2)\quad A = \begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} & \cdots & A^{1M} & A^{1M+1} & \cdots & A^{1N} \\ & A^{22} & \cdots & A^{2M} & A^{2M+1} & \cdots & A^{2N} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & A^{MM} & A^{MM+1} & \cdots & A^{MN} \\ & & & & A^{M+1M+1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & A^{NN} \end{pmatrix}$$

Die zur Blockzeile I gehörenden Sektoren nennen wir die Irreduzibilitätskomponente I,[2] die Darstellung (2.2) von A nennen wir eine Zerlegung von A in seine Irreduzibilitätskomponenten. Diese Zerlegung ist bis auf eine gegebenenfalls mögliche andere Reihenfolge der Irreduzibilitätskomponenten und die Reihenfolge der Sektoren innerhalb der Irreduzibilitätkomponenten eindeutig.[3] Wir wollen stets eine solche Reihenfolge wählen, daß diejenigen Irreduzibilitätskomponenten, deren Blockzeile außerhalb der Hauptdiagonalen nur Nullmatrizen enthält, am Schluß zu stehen kommen (Blockzeilen M+1,...,N).

---

1 Die (1·1)-Nullmatrix ist nach unserer Definition irreduzibel, jede größere Nullmatrix ist reduzibel.

2 Zur Kennzeichnung der Irreduzibilitätskomponenten verwenden wir im folgenden große Buchstaben I,J,... als (obere) Indizes.

3 Vgl. etwa Gantmacher [6, S. 65 f].

Die Endnachfrage bei reduziblem A. Die Irreduzibilitätskomponenten M+1,...,N sind dadurch charakterisiert, daß ihre Sektoren keinerlei Vorleistungen für andere Irreduzibilitätskomponenten erbringen. Einen Sinn in der Produktionsstruktur einer Volkswirtschaft haben sie daher nur, wenn aus jeder dieser Komponenten mindestens ein Sektor Leistungen für die Endnachfrage erbringt.[1] Ist $f = (f^1,\ldots,f^M,f^{M+1},\ldots,f^N)'$ ein Endnachfragevektor, bei dem die Teilvektoren f^I gerade den Irreduzibilitätskomponenten I entsprechen, so ist für ökonomisch sinnvolle Situationen also stets die Bedingung

$$\begin{aligned} f^I &\geqq o \quad \text{für } I=1,\ldots,M \\ f^I &\gneqq o \quad \text{für } I=M+1,\ldots,N \end{aligned} \tag{2.3}$$

gegeben. Dies ist die Bedingung, die für reduzible Inputkoeffizientenmatrizen an die Stelle der sonst ausreichenden Bedingung $f \gneqq o$ zu treten hat, was auf folgendem Satz beruht:

Satz 2.1: Sei A eine reduzible Inputkoeffizientenmatrix mit der Zerlegung (2.2) in Irreduzibilitätskomponenten und f ein Endnachfragevektor, der die Bedingung (2.3) erfüllt. Dann gilt

$$x = (E-A)^{-1}f > o. \tag{2.4}$$

Beweis: Zu zeigen ist, daß zur Befriedigung der Endnachfrage f Vorleistungen aus allen Irreduzibilitätskomponenten I = 1,...,M (und damit aus allen Sektoren) erforderlich sind. Wenn eine solche Irreduzibilitätskomponente I aber nicht direkt Vorleistungen an eine

1 Man beachte hierbei, daß die (Netto-)Investitionslieferungen nicht zur Endnachfrage gehören, daß aber Lieferungen von Kapitalgütern aus Sektor i an den Sektor j (vermöge der dann notwendigen Reinvestitionen) sich stets in einem Koeffizienten $a_{ij} \neq o$ niederschlagen.

Endnachfrage-nahe Irreduzibilitätskomponente liefert (d.h. $A^{IJ} = o$ für alle $J = M+1,\ldots,N$), so erbringt sie doch Vorleistungen für eine ihr nachgeordnete Irreduzibilitätskomponente (d.h. $A^{IJ} \neq o$ für ein $J = I+1,\ldots,M$), was dann, gegebenenfalls über mehrere Zwischenschritte, einer indirekten Belieferung der Endnachfrage-nahen Irreduzibilitätskomponenten $I = M+1,\ldots,N$ und damit der Endnachfrage f gleichkommt.//

Die Partikulärlösung bei reduziblem A. Ist die Inputkoeffizientenmatrix A reduzibel, gilt anstelle von Satz 1.1, da $(E-A)^{-1}$ dann nicht strikt positiv ist, nur die schwächere Aussage:

Satz 2.2: (i) $B^{-1}(E-A)$ besitzt einen positiven Eigenwert λ_1, zu dem ein nichtnegativer Eigenvektor e_1 existiert.
(ii) λ_1 ist dem Betrage nach kleiner oder gleich allen anderen Eigenvektoren von $B^{-1}(E-A)$.

Beweis: Wie Satz 1.1.//

Damit folgt für reduzibles A aus $f(o) \geq o$ weder, daß eine existierende Partikulärlösung von Modell 1 strikt größer als o ist, noch, daß der minimale Eigenwert λ_1 von $B^{-1}(E-A)$ eine obere Grenze des möglichen Wachstums der Endnachfrage f(o) darstellt (vgl. dazu die Beispiele am Schluß dieses Paragraphen). Es gilt aber:

Satz 2.3: Sei A eine reduzible Inputkoeffizientenmatrix mit der Zerlegung (2.2) in Irreduzibilitätskomponenten. Dann gilt:

(i) für $w<\lambda_1$ existiert $(E-A-wB)^{-1}$ und es gilt $(E-A-wB)^{-1} \geq o$. Für eine Endnachfrage f(t), die die Bedingung (2.3) erfüllt, ist $\bar{x}(o) = (E-A-wB)^{-1}f(o) \geq o$, die zu f(t) gehörige Partikulärlösung ist also strikt positiv.

(ii) Für $w \geq \lambda_1$ existiert für keine Endnachfragestruktur, die die Bedingung (2.3) erfüllt, eine nichtnegative Partikulärlösung von Modell 1.

Beweis: (i) Da in den Beweis von Satz 1.2 die Irreduzibilität von A wesentlich einging, haben wir hier etwas detailliertere Überlegungen anzustellen. Sei dazu $B = (B^{IJ})$ die Zerlegung von B in die Irreduzibilitätskomponenten von A.[1] Es sei

$$
\begin{aligned}
(2.5) \quad S &= (E-A)^{-1}B &&= (S^{IJ}) \\
Q &= B^{-1}(E-A) &&= (Q^{IJ}) \\
U &= E-A-wB &&= (U^{IJ}) \\
V &= (E-A-wB)^{-1} &&= (V^{IJ}),
\end{aligned}
$$

wobei (S^{IJ}) die Zerlegung von S in die Irreduzibilitätskomponenten von A sein soll und entsprechend für Q, U und V. Mit A und B sind auch S, Q, U und V blocktriangulare Matrizen. Die Eigenwerte von S sind damit gerade die Eigenwerte der Hauptdiagonal-Untermatrizen $S^{II} = (E-A^{II})^{-1}B^{II}$, die wegen der Irreduzibilität der Matrizen A^{II} sämtlich positiv sind. Sei μ^I der maximale Eigenwert von S^{II} und e^I der zugehörige positive Eigenvektor. Mit $\lambda^I = 1/\mu^I$ gilt dann:

---

1 Dies ist i.a. keine Zerlegung von B in Irreduzibilitätskomponenten (von B). Es gilt aber, daß $B^{IJ} = o$ für $A^{IJ} = o$ (vgl. Fußnote 1 auf Seite 21). Insbesondere ist $B = (B^{IJ})$ eine blocktriangulare Matrix.

(2.6) $Q^{II}\, e^I = \lambda^I e^I \qquad I=1,\dots,N.$

Für $x = (\varsigma^1 e^1,\dots,\varsigma^N e^N)' > o$ mit $\varsigma^I > o$ für $I=1,\dots,N$ gilt dann

(2.7) $$\begin{bmatrix} Q^{11} & & o \\ & \ddots & \\ o & & Q^{NN} \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} \lambda^1 \varsigma^1 e^1 \\ \vdots \\ \lambda^N \varsigma^N e^N \end{bmatrix} > wx ,$$

da $w<\lambda_1 = \text{Min}\{\lambda^I;\ I=1,\dots,N\}$. Durch geeignete Wahl der Parameter ς^I [1] läßt sich erreichen, daß über (2.7) hinaus auch gilt:

(2.8) $Qx > wx.$

Daraus läßt sich genau wie im Beweis von Satz 1.2 $Ux \gneqq o$ ableiten, woraus hier wegen der Reduzibilität von A+wB mit dem Theorem über die Invertierbarkeit von Leontief-Matrizen (Satz A.5, (II) $\Rightarrow$ (I)) allerdings nur folgt: $V \geqq o$ und $\bar{x}(o) = Vf(o) \geqq o$. $\bar{x}(o) > o$ folgt (mit der Bedingung (2.3) für $f(o)$) aus Satz 2.1, womit (i) bewiesen ist.

Zum Beweis von (ii) nehmen wir an, es gebe einen Produktionsmengenvektor $x \geqq o$ und ein $f(o)$, das der Bedingung (2.3) genügt, die die Gleichung

(2.9) $U\,\bar{x}(o) = f(o)$

erfüllen. Wir werden zeigen, daß daraus $w<\lambda_1$ folgt, womit (ii) bewiesen ist.

(2.9) läßt sich für die einzelnen Irreduzibilitätskomponenten schreiben als:

(2.10) $$\sum_J U^{IJ}\bar{x}^J(o) = f^I(o) \qquad I=1,\dots,N .$$

---

1 Man setze etwa $\varsigma^N = \dots = \varsigma^{M+1} = 1$ und wähle ς^M, $\varsigma^{M-1},\dots,\varsigma^1$ der Reihe nach hinreichend klein.

Aus den letzten N-M Gleichungen, die die Gestalt

$$(2.11)\quad U^{II}\bar{x}^{I}(o) = (E-A^{II}-wB^{II})\,\bar{x}^{I}(o) = f^{I}(o) \geqslant o \qquad I=M+1,\ldots,N$$

haben, folgt wegen der Irreduzibilität von A^{II} nach Satz 1.2: $w<\lambda^{I}$ und $\bar{x}^{I}(o)>o$ für I=M+1,...,N. Damit folgt für die ersten M Gleichungen von (2.1o) der Reihe nach (I=M,M-1,...,1)

$$(2.12)\quad (E-A^{II}-wB^{II})\bar{x}^{I}(o) = f^{I}(o) + \sum_{J=I+1}^{N}(A^{IJ}+wB^{IJ})\bar{x}^{J}(o) \geqslant o$$

und damit

$$(2.13)\quad w<\lambda^{I} \quad \text{und} \quad \bar{x}^{I}(o) > o.$$

Damit ist insgesamt $w<\text{Min}\,\{\lambda^{I};\ I=1,\ldots,N\} = \lambda_1$ gezeigt.//

Die allgemeine Lösung bei reduziblem A. Nach Satz 2.3 wissen wir, daß λ_1 auch für reduzible Inputkoeffizientenmatrizen die obere Grenze für die Existenz einer nichtnegativen gleichgewichtigen Lösung von Modell 1 darstellt, wenn die Endnachfrage die Bedingung (2.3) erfüllt. Damit ist jedoch noch nicht ausgeschlossen, daß für $w \geqslant \lambda_1$ nicht trotz (2.3) eine andere nichtnegative Lösung von Modell 1 als die Partikulärlösung existiert. Es gilt jedoch der folgende Satz (dessen 2. und 3. Teil wieder für spätere Anwendungen formuliert sind):

Satz 2.4: (i) Für $w \geqslant \lambda_1$ existiert keine für alle t nichtnegative Lösung von Modell 1, falls f(o) die Bedingung (2.3) erfüllt.

(ii) Jede Lösung von Modell 1 wächst asymptotisch mit mindestens der Rate w.

(iii) Zu jedem w≥o gibt es eine Lösung von Modell 1, die asymptotisch mit der Rate w wächst.

Der Beweis ist entsprechend dem Beweis von Satz 1.3 zu führen. Da hier jedoch auch zu Eigenwerten $\lambda_i \neq \lambda_1$ nichtnegative Eigenvektoren existieren können, ist zusätzlich zu zeigen, daß der von den entsprechenden Basislösungen ausgehende positive Einfluß auf die allgemeine Lösung nicht in der Lage ist, den von einem mit dem Faktor (1+w) wachsenden Inhomogenitätsterm ausgehenden negativen Einfluß zu kompensieren, was durch eine explizite Betrachtung der Irreduzibilitätskomponenten ähnlich wie im Beweis von Satz 2.3 möglich ist. Der Beweis wird dadurch sehr technisch und sei hier übergangen.

Beispiele. Um die vorangegangenen Aussagen über die Situation bei reduzibler Produktionsstruktur zu verdeutlichen, wollen wir einige numerische Beispiele einer Volkswirtschaft mit 3 Sektoren betrachten, deren Werte in der Tabelle 2.1 dargestellt sind. Die Beispiele sind, um den Aufwand möglichst gering zu halten, so einfach gewählt, daß die Irreduzibilitätskomponenten gerade die drei betrachteten Sektoren sind, die Eigenwerte von $(E-A)^{-1}B$ also jeweils gerade die Hauptdiagonalelemente dieser Matrix sind und $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sich als deren Inverse ergeben.

Für alle 4 dargestellten Beispiele sei die Inputkoeffizientenmatrix:

$$(2.14) \qquad A = \begin{bmatrix} .5 & .4 & .4 \\ . & .5 & . \\ . & . & .5 \end{bmatrix}, \quad [1]$$

1 Nullelemente sind im folgenden der Übersichtlichkeit halber nur mit einem Punkt notiert.

woraus sich die Leontief-Inverse als

$$(2.15) \qquad (E-A)^{-1} = \begin{bmatrix} 2.0 & 1.6 & 1.6 \\ . & 2.0 & . \\ . & . & 2.0 \end{bmatrix}$$

ergibt. Die Sektoren 2 und 3 erbringen keine Vorleistungen für andere Sektoren, sie liefern lediglich (gegebenenfalls) an die Endnachfrage. In der Darstellung (2.2) bedeutet das M = 1. Die Bedingung (2.3) für die Endnachfrage f lautet hier also $f_2 > 0$ und $f_3 > 0$.

Tabelle 2.1: Numerische Beispiele für reduzible Produktionsstrukturen

Beispiel-Nummer →	1	2	3	4
B	$\begin{bmatrix} 4. & 1. & 2. \\ . & 5. & . \\ . & . & 6. \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4. & 1. & 2. \\ . & 5. & . \\ . & . & 5. \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5. & 1. & 2. \\ . & 5. & . \\ . & . & 5. \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6. & 1. & 2. \\ . & 5. & . \\ . & . & 5. \end{bmatrix}$
$(E-A)^{-1}B$	$\begin{bmatrix} 8. & 10. & 12. \\ . & 10. & . \\ . & . & 12.0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8. & 10. & 12. \\ . & 10. & . \\ . & . & 10. \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 10. & 10. & 12. \\ . & 10. & . \\ . & . & 10. \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 12. & 10. & 12. \\ . & 10. & . \\ . & . & 10. \end{bmatrix}$
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	.08 .10 .12	.10 .10 .12	.10 .10 .10	.08 .10 .10
e_1, e_2, e_3	$\begin{bmatrix} 3.4 \\ . \\ 1.0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 5. \\ 1. \\ . \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1. \\ . \\ . \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5. \\ 1. \\ . \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 6. \\ . \\ 1. \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1. \\ . \\ . \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1. \\ . \\ . \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} . \\ 6. \\ -5. \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1. \\ . \\ . \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 5. \\ -1. \\ . \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 6. \\ . \\ -1. \end{bmatrix}$
$(E-A-wB)^{-1}$ für w=0.05	$\begin{bmatrix} 3.33 & 6. & 8.33 \\ . & 4. & . \\ . & . & 5.00 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3.33 & 6. & 6.67 \\ . & 4. & . \\ . & . & 4.00 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4. & 7.2 & 8. \\ . & 4.0 & . \\ . & . & 4. \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5. & 9. & 10. \\ . & 4. & . \\ . & . & 4. \end{bmatrix}$
$(E-A-wB)^{-1}$ für w=0.09	$\begin{bmatrix} 7.14 & 70. & -103.6 \\ . & 20. & . \\ . & . & -25. \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7.14 & 70. & 82.9 \\ . & 20. & . \\ . & . & 20.0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 20. & 196. & 232. \\ . & 20. & . \\ . & . & 20. \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -25. & -245. & -290. \\ . & 20. & . \\ . & . & 20. \end{bmatrix}$
$(E-A-wB)^{-1}$ für w=0.11	$\begin{bmatrix} 16.7 & -170. & -64.6 \\ . & -20. & . \\ . & . & -6.2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 16.7 & -170. & -207. \\ . & -20. & . \\ . & . & -20. \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -20. & 204. & 248. \\ . & -20. & . \\ . & . & -20. \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -6.2 & 63.8 & 77.5 \\ . & -20. & . \\ . & . & -20.0 \end{bmatrix}$

Betrachtet man zu Beispiel 1, in dem $\lambda_1 = 1/12 \approx o.o8$ ist, die Matrix $(E-A-wB)^{-1}$ für $w = o.o9 > \lambda_1$, so findet man, daß die ersten beiden Spalten nichtnegativ sind. Für jede Endnachfrage $f(o)$ mit $f_3(o) = o$ ist damit $\bar{x}(o) \geqq o$ und ein Wachstum der Endnachfrage $f(o)$ mit 9 % ist möglich. Für jede Endnachfrage mit $f_3(o) > o$ ist dagegen $\bar{x}_3(o) < o$, so daß ein Wachstum einer solchen Endnachfrage mit 9 % nicht möglich ist. Soll die Wachstumsrate w 11 % betragen, ist in Beispiel 1 überhaupt nur noch die Befriedigung einer (mit w = o.11 wachsenden) Endnachfrage im Sektor 1 möglich, da nur die Spalte 1 der Matrix $(E-A-wB)^{-1}$ dann nichtnegativ ist.

Entsprechendes gilt in Beispiel 2 mit dem Unterschied, daß hier überhaupt nur eine Endnachfrage nach Gütern aus Sektor 1 mit einer Rate größer als λ_1 (hier o.1o) wachsen kann; sobald $w > \lambda_1$ ist, werden die 2. und 3. Spalte von $(E-A-wB)^{-1}$ negativ.

Demgegenüber ist in den Beispielen 3 und 4 für keinen Sektor ein Wachstum der Endnachfrage mit einer größeren Rate als λ_1 (λ_1 = o.1o in Beispiel 3, λ_1 = o.o8 in Beispiel 4) möglich. Der Grund dafür liegt darin, daß der kleinste Eigenwert λ_1 in den Beispielen 3 und 4 Eigenwert derjenigen Irreduzibilitätskomponente (hier: von Sektor 1) ist, die Vorleistungen für alle übrigen Sektoren erbringt. Da λ_1 die größte Rate ist, mit der eine nichtnegative Produktion von Sektor 1 überhaupt - ohne Leistungen für andere Sektoren oder die Endnachfrage zu erbringen - wachsen kann, ist damit klar, daß auch kein anderer Sektor mit einer Rate größer als λ_1 wachsen kann.

Beispiele 1 und 2 zeigen weiter, daß neben e_1 weitere nichtnegative Eigenvektoren existieren können. Damit kann das homogene System durchaus schneller wachsen als mit der Rate λ_1, so etwa auf dem Pfad

$$(2.16) \quad x(t) = e_1(1+\lambda_1)^t + e_2(1+\lambda_2)^t + e_3(1+\lambda_3)^t$$

(allerdings nie so, daß alle Komponenten $x_i(t)$ i=1,..., n mit einer Rate $w \geq \lambda_1$ wachsen würden).

Die Betrachtung der Beispiele 1 und 2 macht deutlich, daß die Einheitlichkeit der sektoralen Wachstumsraten der Endnachfrage bewirkt, daß λ_1 eine obere Schranke für das Wachstum jeder Endnachfrage ist, die der Bedingung (2.3) genügt: Das schwächste Glied bestimmt die Stärke einer Kette. Wir werden im Paragraphen 5, in dem wir ein Modell mit unterschiedlichen sektoralen Wachstumsraten der Endnachfrage betrachten, noch näher auf diesen Punkt eingehen.

Zusammenfassung. Satz 2.2 und Satz 2.3 zeigen, daß bezüglich der Existenz von nichtnegativen Lösungen von Modell 1 die in Kapitel 1 gemachte Voraussetzung der Irreduzibilität von A nicht wesentlich ist, wenn man von einer Endnachfrage ausgeht, die tatsächlich den gesamten Produktionsapparat der Volkswirtschaft in Anspruch nimmt (Bedingung (2.3), Satz 2.1): Der minimale Eigenwert λ_1 von $(E-A)^{-1}B$ bestimmt in jedem Falle die obere Grenze eines möglichen Wachstums der Endnachfrage. Die Eindeutigkeitsaussage von Kapitel 1, daß nichtnegatives Wachstum im wesentlichen nur bei der durch die Partikulärlösung oder bei der durch e_1 gegebenen Struktur möglich ist, trifft - wie die diskutierten Beispiele zeigen - im allgemeinen für reduzible Produktionsstrukturen nicht mehr zu.

Im folgenden werden wir wieder, soweit nicht ausdrücklich anders erwähnt, von A die Irreduzibilität voraussetzen.

§ 2 Lösung von Modell 1 für singuläre Kapitalkoeffizientenmatrix

Ist die Kapitalkoeffizientmatrix B nicht invertierbar, so bedeutet das, daß die Spalten von B nicht linear unabhängig voneinander sind, daß also zwei Sektoren dieselbe Struktur in ihren Kapitalkoeffizienten haben oder jedenfalls die Struktur der Kapitalkoeffizienten eines Sektors sich als "Mischung" (Linearkombination) der Strukturen anderer Sektoren ergibt[1]. Soweit eine derartige lineare Abhängigkeit lediglich gewissermaßen rein zufällig zustande kommt, ist dieses Phänomen für empirische Arbeiten vernachlässigbar (es verschwindet bei Einbeziehung hinreichend vieler Stellen hinter dem Komma) und daher auch für die Theorie uninteressant. Es gibt jedoch Situationen, die prinzipiell (nicht zufällig) zur Singularität von B führen. Dabei ist vor allem[2] der Fall einer Untergliederung einer Volkswirtschaft in Sektoren, die nicht alle (auch) Güter zu Investitionszwecken liefern, zu nennen. In Bezug auf die Kapitalkoeffizientenmatrix B bedeutet das, daß sie eine oder mehrere Nullzeilen enthält. Je mehr Sektoren in der Analyse unterschieden werden

---

1 Dasselbe läßt sich von den Zeilen von B sagen, ist aber ökonomisch weniger interessant, da der Zeilenstruktur von B - im Gegensatz zu der Spaltenstruktur - im hier betrachteten Zusammenhang nicht unmittelbar eine ökonomische Bedeutung zukommt.

2 Für eine weitere, mehr erhebungstechnische Ursache für Singularität von B vgl. Livesey [22, S. 18 ff].

und je strenger die Klassifikation der Sektoren nach den in ihnen erzeugten Gütern (Klassifikation auf "commodity basis"[1]) erfolgt, desto eher wird dieser Fall eintreten.

Wir werden in diesem Paragraphen zeigen, daß die in Kapitel 1 abgeleiteten Ergebnisse über Modell 1 im wesentlichen auch im Fall einer singulären Kapitalkoeffizientenmatrix gelten.[2]

Die Partikulärlösung. Sei im folgenden B eine nichtnegative Matrix mit dem Rang r, $o<r<n$. Wenn wir von A wieder die Irreduzibilität voraussetzen, so gilt wieder $(E-A)^{-1} > o$, woraus jetzt aber nur noch folgt: $(E-A)^{-1}B \geq o$. Sei μ_1 der maximale Eigenwert von $(E-A)^{-1}B$ und $\lambda_1 = 1/\mu_1$. In den Beweis von Satz 1.2 über die Existenz einer nichtnegativen Partikulärlösung ging die Invertierbarkeit von B an keiner Stelle ein. Es gilt also:

Satz 2.5: Für singuläres B gilt Satz 1.2 unverändert.

Die Größe λ_1, die hier allerdings nicht als Eigenwert einer Matrix $B^{-1}(E-A)$ interpretiert werden kann, stellt also auch hier die obere Grenze für die Wachstumsrate w der Endnachfrage dar, bis zu der eine nichtnegative Partikulärlösung existiert.

Die Eigenwerte und Eigenvektoren von $(E-A)^{-1}B$: Im Beweis von Satz 1.2 wird der Eigenvektor e_1 von $(E-A)^{-1}B$ zum Eigenwert μ_1 charakterisiert als maximaler Eigenwert der irreduziblen Matrix $A + \lambda_1 B$:

---

1 Vgl. dazu etwa Schumann [37, S. 18].

2 Für den Spezialfall, daß die Singularität von B auf Nullzeilen beruht, wurden ähnliche Ergebnisse abgeleitet von Kendrick [14] und Livesey [21], [22, S. 6 f].

((1.13)) $(A+\lambda_1 B)e_1 = e_1$.

Daraus folgt nach dem Theorem von Frobenius (Satz A.6), daß e_1 strikt positiv ist. Wir werden jetzt zeigen, daß für singuläres B e_1 der einzige nichtnegative Eigenvektor von $(E-A)^{-1}B$ zu einem von Null verschiedenen Eigenwert ist. Seien $\mu_2,\ldots,\mu_n$ die übrigen Eigenwerte von $(E-A)^{-1}B$, $|\mu_2| \geq |\mu_3| \geq \ldots \geq |\mu_n|$, und $e_2,\ldots,e_n$ die zugehörigen Eigenvektoren. Mit B hat auch $(E-A)^{-1}B$ den Rang r, $(E-A)^{-1}B$ hat also den Eigenwert o mit der Vielfachheit n-r[1], d.h. $\mu_{r+1} = \ldots = \mu_n = o$.

Satz 2.6: Keiner der Eigenvektoren $e_2,\ldots,e_r$ ist nichtnegativ.

Beweis: Hat B in jeder Spalte ein von Null verschiedenes Element, so ist $(E-A)^{-1}B$ positiv und die Behauptung folgt aus dem Theorem von Frobenius. Andernfalls seien ohne Beschränkung der Allgemeinheit die letzten s Spalten ($s \leq n-r$) von B Null. Dann hat $(E-A)^{-1}B$ die Gestalt

$$(2.17) \quad (E-A)^{-1}B = \begin{pmatrix} S^{11} & o \\ S^{12} & o \end{pmatrix}$$

mit S^{11} als quadratischer Matrix der Ordnung n-s (wodurch die Größe der anderen Teilmatrizen klar ist). Für alle i sei $e_i = (e_i^1, e_i^2)'$ eine (2.17) entsprechende Partitionierung von e_i. (2.17) entnimmt man (Dreiecksform!), daß die Eigenwerte von S^{11} $\mu_1,\ldots,\mu_r$ und n-r-s-mal die o sind. Sei jetzt für $2 \leq i \leq r$ $e_i \geq o$. Dann gilt:

---

1 Daß eine Matrix M nicht invertierbar ist, bedeutet gerade, daß ein $x \neq o$ mit $Mx = o$ existiert, also daß o Eigenwert von M ist.

$$(2.18)\quad (E-A)^{-1}Be_i = \begin{bmatrix} S^{11} & 0 \\ S^{12} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_i^1 \\ e_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S^{11}e_i^1 \\ S^{12}e_i^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_i e_i^1 \\ \mu_i e_i^2 \end{bmatrix}.$$

Aus $S^{11}e_i^1 = \mu_i e_i^1$ würde für $e_i^1 \geqslant o$ folgen, daß neben e_1^1 noch weitere nichtnegative Eigenvektoren der positiven Matrix S^{11} existieren, im Widerspruch zum Theorem von Frobenius. Also ist $e_i^1 = o$. Dann folgt aus $\mu_i e_i^2 = S^{12}e_i^1 = o$ aber $(\mu_i \neq o!)$, daß auch $e_i^2 = o$ ist, im Widerspruch zur Eigenschaft von e_i, ein Eigenvektor zu sein.//

Die anderen Eigenvektoren $e_{r+1},\ldots,e_n$ können (im Falle des Vorliegens von Nullspalten) durchaus nichtnegativ sein. Wir werden im folgenden jedoch sehen, daß sie hier keine Rolle spielen.

Zulässige Produktionsmengenvektoren. Bei invertierbarem B läßt sich das Modell 1 beschreibende Differenzengleichungssystem (1.7) nach x(t+1) auflösen (in seine explizite Form bringen). Damit existiert zu jedem x(t) ein eindeutig bestimmtes x(t+1), zu beliebig vorgegebenem Anfangswert x(o) existiert also eine eindeutig bestimmte Lösung des Differenzengleichungssystems.

Ist B singulär, so existiert nicht zu jedem Produktionsmengenvektor x(t) ein Produktionsmengenzuwachsvektor $\Delta x(t)$, der zusammen mit x(t) das Gleichungssystem (1.7) für die Periode t erfüllt. Schreiben wir z(t) für die zu investiven Zwecken verfügbaren Mengen bei der Produktion x(t):

$$(2.19)\quad z(t) = x(t) - Ax(t) - f(t),$$

so wird das deutlich bei der Betrachtung der dann (1.7) entsprechenden Gleichung

$$(2.2o)\quad B\Delta x(t) = z(t).$$

Wenn B singulär ist, ist (2.2o) offenbar nur für spezielle Vektoren z(t) zu erfüllen. Andererseits gilt, daß, wenn eine Lösung $\Delta x(t)$ von (2.2o) existiert, diese nicht eindeutig bestimmt ist, man hat n-r (r = Rang von B) Freiheitsgrade bei der Bestimmung von $\Delta x(t)$. Einen Produktionsmengenvektor x(t) wollen wir zulässig nennen, wenn das durch x(t) bestimmte z(t) (2.2o) zu einem lösbaren Gleichungssystem macht.

Kommt die Singularität von B etwa dadurch zustande, daß n-r Zeilen von B Null sind, so müssen, damit (2.2o) lösbar ist, offenbar die entsprechenden n-r Elemente von z(t) Null sein. In einer Situation, in der einige Sektoren keine zu Investitionszwecken benötigten Güter produzieren, bedeutet die Zulässigkeit von x(t) also gerade, daß die Produktion $x_i(t)$ dieser Sektoren genau so groß ist, wie es der Vorleistungs- zuzüglich der Endnachfrage entspricht.

Die allgemeine Lösung. Eine Lösung von Modell 1 kann nur für einen zulässigen Anfangsvektor x(o) existieren. Wir werden zeigen, daß zu jedem zulässigen Anfangsvektor x(o) eine eindeutig bestimmte Lösung existiert, was bedeutet, daß die n-r Freiheitsgrade, die man bei zulässigen x(t) in Periode t bei der Bestimmung von $\Delta x(t)$ hat, gerade ausreichen, die Bedingung zu erfüllen, daß $x(t+1) = x(t) + \Delta x(t)$ ebenfalls ein zulässiger Vektor ist.

Dazu betrachten wir zunächst den homogenen Teil von (1.7), den wir in der Form

$$(2.21) \quad x(t) = (E-A)^{-1}B\Delta x(t)$$

schreiben können. Da der Rang von $(E-A)^{-1}B$ r ist, ist der Lösungsraum von (2.21) r-dimensional. r unabhänge Lösungen werden aber gerade durch die Basis-

lösungen

$$(2.22) \quad x(t) = (1+\lambda_1)^t e_i,$$

wo $\lambda_i = 1/\mu_i$, für i=1,...,r gegeben. Die allgemeine Lösung des inhomogenen Modells lautet demnach

$$(2.23) \quad x(t) = \bar{x}(t) + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i (1+\lambda_i)^t e_i,$$

wo $\bar{x}(t)$ eine spezielle Lösung des inhomogenen Modells ist. Für $\bar{x}(t)$ ist im Falle $w<\lambda_i$ die Partikulärlösung einzusetzen, für $w = \lambda_i$ die im Beweis von Satz 1.3 abgeleitete Lösung der Form $x(t) = (1+w)^t (\bar{\bar{x}}+t\bar{\bar{x}})$.[1]

Da e_1 nach Satz 2.6 der einzige nichtnegative Eigenvektor ist, hat der homogene Teil von Modell 1 im wesentlichen (vgl. den Passus über die Nichtnegativität der Lösungen in Kapitel 1, § 3) nur die zu λ_1 gehörige Basislösung (2.22) als nichtnegative Lösung, das inhomogene Modell 1 hat also - wie bei invertierbarem B - zwei Typen von nichtnegativen Lösungen: die Partikulärlösung und Lösungen, die gegen den Gleichgewichtspfad des homogenen Teils konvergieren.

Da alle Eigenwerte $e_2,...,e_r$ negative Komponenten aufweisen, läßt sich auch Satz 1.3 genauso wie in Kapitel 1, § 3 beweisen:

Satz 2.7: Für singuläres B gilt Satz 1.3 unverändert.

λ_1 stellt also eine Grenze für die Wachstumsrate w der Endnachfrage nicht nur hinsichtlich der Existenz einer nichtnegativen Partikulärlösung dar, sondern für $w \geq \lambda_1$ existiert auch bei singulärem B überhaupt keine nichtnegative Lösung von Modell 1.

---

1 In die Ableitung dieser Lösung ging die Invertierbarkeit von B nicht ein.

Lösung zu gegebenen Anfangswerten. Sei x(o) ein zulässiger Anfangsvektor. Die Bedingung der Zulässigkeit (2.19/2o) besagt, daß es einen (nicht eindeutig bestimmten) Vektor y gibt mit

$$(2.24)\quad By = (E-A)x(o) - f(o).$$

Entsprechend folgt aus der Zulässigkeit des Anfangsvektors $\bar{x}(o)$ der Partikulärlösung, daß es ein $\bar{y}$ gibt mit

$$(2.25)\quad B\bar{y} = (E-A)\bar{x}(o) - f(o).$$

Aus (2.24) und (2.25) folgt

$$(2.26)\quad x(o)-\bar{x}(o) = (E-A)^{-1}B(y-\bar{y}).$$

Das bedeutet, daß die Differenz $x(o)-\bar{x}(o)$ in dem von den Spaltenvektoren $s_1,\ldots,s_n$ von $(E-A)^{-1}B$ aufgespannten Vektorraum der Dimension r (= Rang von $(E-A)^{-1}B$) liegt. Eine Basis dieses Raumes bilden aber gerade die r linear unabhängigen Eigenvektoren $e_1,\ldots,e_r$, die wegen

$$(2.27)\quad e_i = \lambda_i(E-A)^{-1}Be_i = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_i e_{ki})s_i$$

alle in diesem Vektorraum liegen ($e_i=(e_{1i},\ldots,e_{ni})'$). Damit läßt sich $x(o) - \bar{x}(o)$ eindeutig schreiben in der Form

$$(2.28)\quad x(o)-\bar{x}(o) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i e_i\ ,$$

und die allgemeine Lösung (2.23) mit den so bestimmten α_i stellt die eindeutig bestimmte Lösung mit dem Anfangswert x(o) dar.

Zusammenfassung. Der einzige Unterschied in Bezug auf die Lösungen von Modell 1, der sich bei singulärem B gegenüber der Situation bei invertierbarem B ergibt, besteht darin, daß nicht mehr zu jedem Anfangswert x(o) eine Lösung existiert, sondern nur noch für die von uns als zulässig bezeichneten Ausgangssituationen, und daß infolgedessen der Lösungsraum nur die Dimension des Ranges von B hat. Insbesondere gelten alle Aussagen über die Existenz von nichtnegativen Lösungen unverändert.

Im folgenden werden wir der Einfachheit halber wieder, soweit nicht ausdrücklich anders erwähnt, von B die Invertierbarkeit voraussetzen.

§ 3 Ein Modell mit zeitlich unverzögert wirksamem Kapazitätseffekt der Investitionen

Formulierung des Modells. In Modell 1 unterstellten wir, daß die in der Periode t produzierten Investitionsgüter eine Erweiterung der Kapazitäten der einzelnen investierenden Sektoren für die Periode t+1 bewirken. Für eine Zeitspanne (t bis t+1), die groß ist im Vergleich zur Ausreifungszeit der Investitionen, könnte es sinnvoll sein, davon auszugehen, daß die Investitionen der Periode t bereits in Periode t eine Erhöhung der Kapazitäten gegenüber denen der Periode t-1 bewirken. Der Zusammenhang zwischen einer Kapazitätserweiterung x(t)-x(t-1) und den dazu in Periode t erforderlichen Investitionen z(t) ist dann gegeben durch

$$(2.29) \quad z(t) = B(x(t)-x(t-1)).$$

Die Gleichgewichtsbedingung "Produktion bei voller Kapazitätsauslastung" führt dann zum Differenzengleichungssystem

$$(2.3o) \quad x(t) = Ax(t) + B(x(t)-x(t-1)) + f(o)(1+w)^t$$

anstelle von (1.9). Den durch (2.3o) beschriebenen Zusammenhang wollen wir als Modell 2.1 bezeichnen.[1]

Alternative Interpretation von Modell 2.1. In der oben gegebenen Interpretation stellt Modell 2.1 ein Gleichgewichtsmodell dar. Es beschreibt genau alle diejenigen Produktionsmengenpfade, auf denen zu jedem Zeitpunkt volle Auslastung der Kapazitäten gegeben ist. Alternativ dazu können wir (2.29) auch als Investitionsnachfragefunktion deuten,[2] die zum Ausdruck bringt, daß eine Erhöhung der Produktion in Sektor i um den Betrag $x_i(t)-x_i(t-1)$ die Unternehmer veranlaßt, in der Periode t Investitionsgüter in einer solchen Höhe nachzufragen, daß die Kapazitäten gerade um den Betrag $x_i(t)-x_i(t-1)$ erhöht werden können. Dabei kann die Frage nach der Ausreifungszeit der Investitionen offen bleiben, wenn wir temporäre Über- (oder Unter-) beschäftigung zulassen. Sind die Kapazitäten in der Periode t-1 etwa voll (= normal) ausgelastet und ergibt sich für einen Sektor nach (2.3o) eine Steigerung der Produktion, so würden wir damit unterstellen, daß die erhöhte Produktion mit den zu Beginn der Periode t vorhandenen Kapitalbeständen erbracht wird und die Unternehmer sich mit ihrer Investitionsnachfrage in der Periode t an die Veränderung der Produktion von der Periode t-1 zur Periode t anpassen.

---

1 Zur Bezeichnung: Modell 2.1 ist das erste in Kapitel 2 eingeführte Modell.

2 Vgl. dazu etwa Schumann [37, S. 17o f.] und die dort angegebene Literatur.

Zusammenhang zwischen Modell 1 und Modell 2.1. Lösen wir (2.3o) nach x(t) auf, so erhalten wir

$$(2.31)\quad x(t) = -(E-A-B)^{-1}Bx(t-1) + (E-A-B)^{-1}f(t).$$

Definieren wir $\bar{B}$ als

$$(2.32)\quad \bar{B} = B - (E-A),$$

so läßt sich (2.31) umformen zu

$$(2.33)\quad x(t) = (E + \bar{B}^{-1}(E-A))x(t-1) - \bar{B}^{-1}f(t).^{1}$$

Von der in (2.32) definierten Matrix $\bar{B}$ wollen wir im folgenden die Invertierbarkeit voraussetzen.[2] Das Differenzengleichungssystem (2.33) entspricht formal genau dem zu Modell 1 gehörenden Differenzengleichungssystem (1.9); die Unterschiede bestehen lediglich darin, daß B gegenüber (1.9) durch $\bar{B}$ ersetzt ist und der Zeitindex der Endnachfrage um eine Periode verschoben ist. Da $\bar{B}$ i.a. jedoch negative Elemente (auf der Hauptdiagonalen) enthält, lassen sich Aussagen über Eigenwerte und Eigenvektoren von $\bar{B}^{-1}(E-A)$ nicht (unmittelbar) mit Hilfe des Theorems von Frobenius ableiten wie in Kapitel 1. Das gelingt jedoch (indirekt) mit Hilfe des folgenden Satzes:

---

1 $(E-A-B)^{-1}\,[-B] = (E-A-B)^{-1}\,[(E-A-B) - (E-A)] = E + \bar{B}^{-1}(E-A)$.

2 $\bar{B}$ wäre singulär genau dann, wenn 1 Eigenwert von $(E-A)^{-1}B$ wäre, denn $(B - (E-A))x = o$ gilt genau dann, wenn $(E-A)^{-1}Bx = 1x$. Singularität von $\bar{B}$ kann also "nur zufällig" auftreten. - Für singuläres $\bar{B}$ wäre § 2 dieses Kapitels sinngemäß anzuwenden.

Satz 2.8: Sind $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ die Eigenwerte von $B^{-1}(E-A)$, so sind $\bar{\lambda}_1,\ldots,\bar{\lambda}_n$ mit $\bar{\lambda}_i = \lambda_i/(1-\lambda_i)$ die Eigenwerte von $\bar{B}^{-1}(E-A)$. Die Eigenvektoren beider Matrizen (zu sich entsprechenden Eigenwerten) sind gleich.

Beweis: Zunächst sei festgehalten, daß $\bar{\lambda}_i$ für alle i wohldefiniert ist, da die vorausgesetzte Invertierbarkeit von $\bar{B}$ gerade besagt, daß alle Eigenwerte λ_i von 1 verschieden sind (vgl. Fußnote 2 auf der vorigen Seite). Sind μ_i und $\bar{\mu}_i$ die Eigenwerte von $(E-A)^{-1}B$ und $(E-A)^{-1}\bar{B}$, so gilt wegen

$$(2.34)\quad (E-A)^{-1}\bar{B} = (E-A)^{-1}(B-(E-A)) = (E-A)^{-1}B - E$$

offenbar $\bar{\mu}_i = \mu_i - 1$ und damit

$$(2.35)\quad \bar{\lambda}_i = \frac{1}{\bar{\mu}_i} = \frac{1}{\mu_i - 1} = \frac{1}{1/\lambda_i - 1} = \frac{\lambda_i}{1-\lambda_i}\ .$$

Die Aussage über die Eigenvektoren folgt direkt aus (2.34).//

Bezeichnen wir mit λ_1 wieder den dem Betrage nach kleinsten Eigenwert von $B^{-1}(E-A)$, so würde $\lambda_1 > 1$ bedeuten, daß in Modell 1 die gleichgewichtige Wachstumsrate des homogenen Systems größer als loo % ist. Diesen unrealistischen Fall wollen wir im folgenden ausschließen, wir setzen also $\lambda_1 < 1$ voraus. Daraus folgt $\bar{\lambda}_1 = \lambda_1/(1-\lambda_1) > \lambda_1$. Der Unterschied zwischen $\bar{\lambda}_1$ und λ_1 entspricht dabei genau dem Unterschied, der sich ergibt, wenn man einen gegebenen Differenzbetrag $\Delta a = a(t)-a(t-1)$ einer Zeitreihe einmal auf a(t) und einmal auf a(t-1) bezieht.[1] Darin spiegelt sich

---

1 Ist w als $\Delta a/a(t)$ und $\bar{w}$ als $\Delta a/a(t-1)$ definiert, so gilt $\bar{w} = w/(1-w)$.

gerade der Tatbestand wider, daß Investitionen in Modell 2.1 sofort kapazitätswirksam sind, während sie in Modell 1 erst die Kapazitäten der folgenden Periode erhöhen.

Lösung von Modell 2.1. Mit Hilfe von Satz 2.8 lassen sich alle Aussagen über die Lösungen von Modell 2.1 aus den Ergebnissen von Kapitel 1 ableiten.[1] So ist e_1 der einzige Eigenvektor von $\bar{B}^{-1}(E-A)$, der nichtnegativ ist, die zugehörige Basislösung ist somit im wesentlichen (d.h. bis auf eine Überlagerung durch Basislösungen zu Eigenwerten $\bar{\lambda}_i$ mit $|1+\bar{\lambda}_i| \leq 1+\bar{\lambda}_1$) die einzige nichtnegative Basislösung des homogenen Modells.

Über die Partikulärlösung, die im Falle ihrer Existenz die Form

$$(2.36) \quad \bar{x}(t) = (1+w)^t \bar{x}(o)$$

mit

$$(2.37) \quad \bar{x}(o) = (E-A-w\bar{B})^{-1} f(1)$$

hat, erhalten wir die Aussage:

Satz 2.9: (i) Für $w<\bar{\lambda}_1$ existiert $(E-A-w\bar{B})^{-1}$ und es gilt $(E-A-w\bar{B})^{-1} > o$; für beliebiges $f(o) \geqq o$ ist die Struktur $\bar{x}(o)$ also positiv.

(ii) Für $w \geqq \bar{\lambda}_1$ existiert zu keiner Endnachfragestruktur $f(o) \geqq o$ eine nichtnegative Lösung von Modell 2.1.

---

1 Dabei beachte man aber, daß aus $\lambda_1 < |\lambda_i|$ nicht folgt $\bar{\lambda}_1 < |\bar{\lambda}_i|$. Vgl. dazu auch die Diskussion über die Stabilität weiter unten.

Beweis: (i) Nach (2.32) gilt:

$$(2.38)\quad E-A-w\bar{B} = (1+w)\,(E-A-\frac{w}{1+w}B).$$

Nach Satz 1.2 (i) existiert die Inverse $(E-A-w\bar{B})^{-1}$ und ist nichtnegativ, falls $w/(1+w) < \lambda_1$ gilt, womit wegen

$$(2.39)\quad \frac{w}{1+w} < \lambda_1 \text{ genau dann, wenn } w < \bar{\lambda}_1 = \frac{\lambda_1}{1-\lambda_1}$$

(i) bewiesen ist.

(ii) führt man mit Hilfe von (2.38) und (2.39) entsprechend auf Satz 1.2 (ii) bzw. Satz 1.3 (i) zurück.//

In Modell 2.1 ist damit - wie zu erwarten - ein größeres Wachstums der Endnachfrage möglich als in Modell 1. Die Struktur des gleichgewichtigen Wachstumspfades (2.37) unterscheidet sich dabei von der entsprechenden Struktur (vgl. (1.12)) von Modell 1. Wie man (2.38) entnimmt, geht die Kapitalkoeffizientenmatrix B in Modell 2.1 mit einem etwas geringeren Gewicht in die Bestimmung der gleichgewichtigen Struktur ein als bei Modell 1. Daher gilt, nach (2.38) unter Benutzung des Theorems über die Invertierbarkeit von Leontief-Matrizen, daß bei gleicher Endnachfrage die zur Befriedigung dieser Endnachfrage nötige Produktion $\bar{x}^1(t)$ in Modell 1 größer ist als die entsprechende Produktion $\bar{x}^2(t)$ in Modell 2.1:

$$(2.40)\quad \bar{x}^1(o) = (E-A-wB)^{-1}f(o) > (E-A-\frac{w}{1+w}B)^{-1}f(o) = \bar{x}^2(o)$$

Stabilität. Während die Aussagen über die Existenz und das Aussehen der nichtnegativen Lösungen von Modell 2.1 denen von Modell 1 weitgehend entsprechen,

unterscheiden sich beide Modelle in Bezug auf die Stabilität des jeweiligen homogenen Teils wesentlich voneinander. Die allgemeine Lösung von Modell 1.2 im hier nur interessierenden Fall $w<\bar{\lambda}_1$, in dem nichtnegative Lösungen existieren, lautet:

$$(2.41)\quad x(t) = (1+w)^t\bar{x}(o) + \sum_i \alpha_i(1+\bar{\lambda}_i)^t e_i \ .$$

Formal stimmen damit die Stabilitätsbedingungen für Modell 2.1 mit denen für Modell 1 überein. Da eine nichtnegative Partikulärlösung wegen $1+w < 1+\bar{\lambda}_1$ wiederum nie relativ stabil sein kann, formulieren wir nur die Bedingung

$$(2.42)\quad |1+\bar{\lambda}_i| < 1+\bar{\lambda}_1$$

für die relative Stabilität des homogenen Teils und damit für den 2. Typ von nichtnegativen Lösungen (in Bezug auf alle Lösungen mit $\alpha_1 > o$ in (2.41)). Stellt man das Gebiet, innerhalb dessen die Eigenwerte $\bar{\lambda}_i$ nach (2.42) liegen müssen, graphisch in der komplexen Zahlenebene dar, so ergibt sich ein Kreis um den Punkt -1 mit dem Radius $1+\bar{\lambda}_1$, der in Abbildung 2.1 mit $\bar{\kappa}^2$ bezeichnet ist. Innerhalb dieses Kreises können wir alle Punkte ausschließen, die innerhalb des Kreises $\bar{\kappa}^1$ liegen, der die Bedingung $|\lambda_i| > \lambda_1$ für alle $i=2,\ldots,n$ für die Eigenwerte $\bar{\lambda}_i$ zum Ausdruck bringt.[1]

---

1 $\bar{\kappa}^1$ ist ein Kreis um den Punkt $\lambda_1^2/(1-\lambda_1^2)$ mit dem Radius $\lambda_1/(1-\lambda_1^2)$, denn es gilt $|\lambda_i| \geq \lambda_1$ genau dann, wenn $\left|\bar{\lambda}_i - \frac{\lambda_1^2}{1-\lambda_1^2}\right| \geq \frac{\lambda_1}{1-\lambda_1^2}$. Für eine bequeme Ableitung dieses Sachverhaltes vgl. die folgende Fußnote.

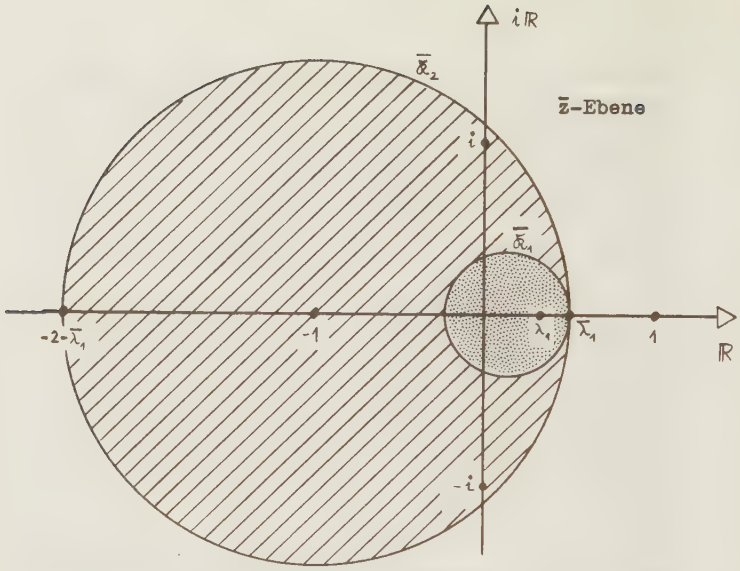

Abbildung 2.1: Stabilitätsgebiet für die Eigenwerte $\bar{\lambda}_i$ zu Modell 2.1

Setzen wir in (2.42) die Beziehung (2.35) aus Satz 2.8 ein, so erhalten wir

$$(2.43)\quad |1+\bar{\lambda}_i| = \left|1+\frac{\lambda_i}{1-\lambda_i}\right| = \frac{1}{|1-\lambda_i|} < 1+\bar{\lambda}_1 = \frac{1}{1-\lambda_1}$$

und damit

$$(2.44)\quad |1-\lambda_i| > 1-\lambda_1.$$

(2.44) stellt die Bedingung dar, der die Eigenwerte λ_i für i=2,...,n genügen müssen, damit die Gleichgewichtslösung des homogenen Teils von Modell 2.1 relativ stabil ist. In Abbildung 2.2 ist dieses Gebiet graphisch dargestellt. Es besteht aus allen Punkten der komplexen Zahlenebene, die außerhalb des Kreises

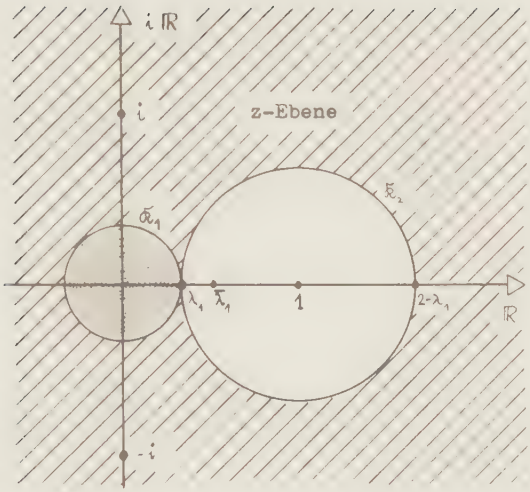

Abbildung 2.2: Stabilitätsgebiet für die Eigenwerte λ_i zu Modell 2.1

$\mathfrak{K}^2$ um den Punkt 1 mit dem Radius $1-\lambda_1$ liegen, wobei die innerhalb des Kreises $\mathfrak{K}^1$ liegenden Punkte wegen $|\lambda_i| > \lambda_1$ für alle i=2,...,n ausgeschlossen werden können.[1] Dieses Stabilitätsgebiet ist - wie ein Ver-

1 Beim Vergleich der Abbildungen 2.1 und 2.2 ist es hilfreich, die Abbildung (Funktion) $\bar{z} = F(z) = z/(1-z)$ von den komplexen Zahlen (z-Ebene) in die komplexen Zahlen ($\bar{z}$-Ebene) zu betrachten. Sie hat die Eigenschaft, die Eigenwerte λ_i auf die Eigenwerte $\bar{\lambda}_i$ abzubilden. F ist eine lineare Transformation im Sinne der Funktionentheorie und hat als solche die Eigenschaft, die Gesamtheit der Geraden und Kreise in sich abzubilden. Vgl. etwa Behnke und Sommer [1, S. 324 f].

gleich von Abbildung 2.2 mit der Abbildung 1 zeigt - größer als das entsprechende Stabilitätsgebiet für Modell 1, so daß wir sagen können:

Satz 2.1o: Aus der relativen Stabilität der Gleichgewichtslösung des homogenen Teils von Modell 1 folgt die entsprechende Stabilität für Modell 2.1.//

Da wir in Kapitel 1, § 3 festgestellt haben, daß den empirischen Erfahrungen nach eine relative Stabilität (des homogenen Teils) für Modell 1 in der Realität nicht gegeben ist, stellt Satz 2.1o allerdings eine für die empirische Situation gehaltlose Aussage dar. Interessant ist jedoch die Möglichkeit einer relativen Stabilität für Modell 2.1 auch in Situationen, wo Modell 1 relativ instabil ist. Es ist also durchaus möglich, daß relative Stabilität von Modell 2.1 empirisch zu finden ist, und das ist umso wahrscheinlicher, als für Modell 1 bisher größtenteils vollständige relative Instabilität gefunden wurde.[1,2]

---

1 So sind die Eigenwerte λ_i, i=2,...,n in Meyer und Schumann [26, S. 2o] sämtlich dem Betrage nach größer als 2, was relative Stabilität für Modell 2.1 bedeuten würde. Allerdings wurde dort die Kapitalkoeffizientenmatrix B unter Zugrundelegung von Differenzen $x_i(t+1)-x_i(t)$ ermittelt, wie es Modell 1 entspricht, so daß eine direkte Übertragung der Ergebnisse auf Modell 1.2 nicht möglich ist.

2 Um Mißverständnissen vorzubeugen, sei hier betont, daß wir nicht deshalb eine relative Stabilität des homogenen Teils von Modell 1.2 für wahrscheinlich halten, weil das Stabilitätsgebiet für die Eigenwerte λ_i in Abbildung 2.2 "groß" ist. Daraus allein läßt sich nichts schließen oder vermuten (das "kleine" Stabilitätsgebiet für die Eigenwerte $\bar{\lambda}_i$ in Abbildung 2.1 ließe entgegengesetzte Vermutungen zu). Unsere Vermutung stützt sich lediglich auf die empirisch festgestellte Lage der Eigenwerte λ_i.

§ 4 Berücksichtigung unterschiedlicher Ausreifungszeiten der Investitionen

In den beiden bisher analysierten Modellen unterstellten wir:

1. daß zur Erhöhung der Produktionskapazität in jedem Sektor eine einmalige Investition erforderlich ist und
2. daß die Ausreifungszeit dieser Investitionen für alle Sektoren dieselbe ist (eine Periode in Modell 1, null Perioden in Modell 2.1).

Es liegt auf der Hand, daß diese Voraussetzungen eine grobe Vereinfachung der Realität darstellen, und zwar umsomehr, je kürzer die der Analyse zugrunde liegende Periodenlänge ist. So dürfte in einem Vierteljahres-Input-Output-Modell die Annahme einer Ausreifungszeit von einer Periode für alle Investitionen gänzlich unrealistisch sein. Wir werden daher die beiden oben genannten Voraussetzungen zugunsten eines allgemeinen Ansatzes abschwächen.[1]

Formulierung des Modells. Wir wollen davon ausgehen, daß zur Erhöhung der Kapazität der Periode t gegenüber der Periode t-1 in Sektor j um eine Einheit Investitionen $b_j(o)$, $b_j(1)$,..., $b_j(T)$ in den Perioden t, t-1, ..., t-T erforderlich sind. $b_j(\tau)$ für $\tau=o,1,...,T$ sind dabei Vektoren von Investitionsgütern aus den Sektoren 1,...,n. Für unterschiedliche τ können diese Vektoren unterschiedlich sein; so wird der Vektor $b_j(\tau)$ für weiter zurückliegende Perioden t-τ vornehmlich Investitionen aus den Bausektoren enthalten, für

---

1 Einen derartigen Ansatz benutzt auch Volkonsky [43, S. 2 ff].

näher an t liegende Perioden hauptsächlich Investitionen an Maschinen und Ausrüstungen und für die Periode t selbst (τ=o) vielleicht Vorratsinvestitionen an für die Aufnahme der Produktion erforderlichen Beständen von Vorleistungsgütern.[1] T sei dabei die längste Ausreifungszeit, die Investitionen für irgendeinen Sektor j benötigen. Sind in einem bestimmten Sektor j nur Investitionen mit kürzerer Ausreifungszeit nötig, so sind letzten der Vektoren $b_j(o)$, $b_j(1),\ldots,b_j(T)$ einfach Null zu setzen.

Ist $\ldots,x(t-1)$, $x(t)$, $x(t+1),\ldots$ ein gegebener Zeitpfad für die sektoralen Produktionskapazitäten, so setzen sich die Investitionen, die zur Realisierung dieser Entwicklung in der Periode t erforderlich sind, zusammen aus Investitionen für eine Erhöhung der Kapazitäten in den Perioden t, t+1, ..., t+T und ergeben sich als

$$(2.45)\quad z(t) = \sum_{\tau=o}^{T} B(\tau)\,(x(t+\tau)-x(t+\tau-1)),$$

wo $B(\tau)$ für τ=o,1,...,T die Matrix bestehend aus den oben eingeführten (Spalten-)Vektoren $b_j(\tau)$ bezeichnet.

Sucht man jetzt nach denjenigen Entwicklungen der Produktionsmengen, für die in jeder Periode volle Auslastung der Kapazitäten gegeben ist, so ist (2.45) in

$$(2.46)\quad x(t) = Ax(t) + z(t) + (1+w)^t f(o)$$

einzusetzen[2]. Den durch das lineare Differenzen-

---

1 Diese sind zu unterscheiden von den laufenden Inputs. Vgl. Kapitel 1, § 1.

2 Damit unterstellen wir für die laufenden Inputs denselben Zusammenhang wie in Modell 1, also insbesondere Proportionalität zwischen Reinvestitionen und Output, was im betrachteten Zusammenhang natürlich fragwürdig ist. Die abgeleiteten Ergebnisse (vgl. insbesondere den letzten Abschnitt dieses Paragraphen) können jedoch als "tendenziell richtig" angesehen werden.

gleichungssystem (T+1)-ter Ordnung (2.45/46) beschriebenen Zusammenhang wollen wir als Modell 2.2 bezeichnen. Für T = o, B(o) = B erhalten wir hieraus als Spezialfall Modell 2.1; für T = 1, B(o) = o, B(1) = B erhalten wir als Spezialfall Modell 1.

Die Partikulärlösung. Wir wollen uns bei der Analyse von Modell 2.2 auf die Partikulärlösung beschränken. Setzen wir dazu $\bar{x}(t) = (1+w)^t \bar{x}(o)$ in (2.45) ein, so ergibt sich

$$(2.47) \quad \bar{z}(t) = B_w \Delta\bar{x}(t)$$

mit

$$(2.48) \quad B_w = \sum_{\tau=o}^{T} B(\tau)\,(1+w)^{\tau-1} ,$$

wobei $\Delta\bar{x}(t) = \bar{x}(t+1)-\bar{x}(t)$. Eine Spalte j von B_w stellt die Summe aller Investitionen dar, die erforderlich sind, um die Kapazität von Sektor j um eine Einheit zu erhöhen, wobei die Summanden entsprechend ihrer Ausreifungszeit mit dem Faktor $(1+w)^{\tau-1}$ gewichtet sind. Investitionen mit langer Ausreifungszeit gehen also mit einem größeren Gewicht in B_w ein als solche mit einer kurzen Ausreifungszeit. Mit (2.47) ergibt sich die Struktur der Partikulärlösung formal wie in Modell 1 als

$$(2.49) \quad \bar{x}(o) = (E-A-wB_w)^{-1} f(o).$$

Da wB_w monoton mit w wächst, gibt es einen positiven Wert für w, den wir in Analogie zum Vorhergehenden mit λ_1 bezeichnen wollen, für den der maximale Eigen-

wert der nichtnegativen, irreduziblen Matrix $A+wB_w$ gerade 1 ist.[1] Damit gilt entsprechend zu Satz 1.2:

Satz 2.11: (i) Für $w<\lambda_1$ existiert $(E-A-wB_w)^{-1}$ und ist positiv. Für beliebige Endnachfragestruktur $f(o) \geqslant o$ existiert damit eine positive Partikulärlösung.

(ii) Für $w \geqslant \lambda_1$ gibt es für keine Endnachfragestruktur $f(o) \geqslant o$ eine nichtnegative Partikulärlösung.//

Wie bei Modell 1 ist die Produktion, die zur Befriedigung einer mit der Rate w wachsenden Endnachfrage erforderlich ist, umso größer, je größer w ist. Die Struktur von $\bar{x}(o)$ wird dabei für wachsendes w relativ (im Vergleich zu den Erfordernissen an laufenden Inputs) stärker durch die Kapitalerfordernisse geprägt. In Modell 2.2 kommt dabei überdies zum Ausdruck (vgl. (2.48)), daß für größeres w der Anteil der Investitionen mit langer Ausreifungszeit stärker zum Tragen kommt.

Modell 1 als Vereinfachung von Modell 2.2. Nehmen wir an, eine Volkswirtschaft, deren Produktionsstruktur mit Modell 2.2 korrekt beschrieben sei, befände sich auf dem gleichgewichtigen Wachstumspfad $\bar{x}(t)$ mit einer Wachstumsrate w. Die Investitionen $\bar{z}(t)$ in jeder Periode t können dann nach (2.47) in Abhängigkeit von $\Delta\bar{x}(t)$ angegeben werden. Betrachtet man nun ein Modell 1 mit $B = B_w$, so erhält man als Gleichgewichtspfad

---

1 Es läßt sich zeigen, daß λ_1 die größte Rate ist, mit der das zu Modell 2.2 gehörige homogene System nichtnegativ wachsen kann. Die dazu erforderliche Struktur ist durch den positiven Eigenvektor e_1 von $A+\lambda_1 B_{\lambda_1}$ gegeben.

dieses Modells zur selben, mit der Rate w wachsenden Endnachfrage denselben Pfad $\bar{x}(t)$. Auch für alternative Endnachfragestrukturen f(o) ergeben beide Modelle denselben Gleichgewichtspfad. Insoweit ist Modell 1 ebenfalls geeignet zur Beschreibung der zugrunde liegenden Volkswirtschaft; die Matrix B ist dabei allerdings korrekterweise zu interpretieren als Matrix derjenigen Koeffizienten, die die durchschnittlichen Investitionen der einzelnen Sektoren in einer Periode t angeben, die beim gegenwärtigen Wachstum mit der Rate w für die Erhöhung der Kapazität für die Periode t+1 um eine Einheit erforderlich sind.

Benutzt man ein so gebildetes Modell 1 jetzt aber zur Ermittlung des Gleichgewichtspfades für eine mit einer anderen Rate w' als w wachsende Endnachfrage, so stimmt die Lösung nicht mehr mit der "wahren" Lösung von Modell 2.2 überein, und zwar werden für $w' > w$ die Produktionsmengen des Gleichgewichtspfades unterschätzt und für $w' < w$ überschätzt (vgl. (2.48) und (2.49)).[1] Modell 1 stellt damit im strengen Sinne eine zulässige Vereinfachung von Modell 2.2 nur für eine gegebene Wachstumsrate der Endnachfrage dar[2], wobei diese Wachstumsrate in geeigneter Weise bei der Ermittlung von B zu berücksichtigen ist ($B = B_w$).[3]

---

1 Das gilt jedenfalls, wenn die Investitionen mit einer Ausreifungszeit von einer oder mehr Perioden die mit einer Ausreifungszeit von null Perioden überwiegen.

2 Und natürlich nur, sofern lediglich die Gleichgewichtslösung interessiert.

3 Bei einer genaueren Analyse der Reinvestitionen würde sich entsprechend ergeben, daß auch die Inputkoeffizientenmatrix A nur für eine gegebene Wachstumsrate wirklich als konstant anzusehen ist.

verschieden) mit derselben Rate w_i wachsen. Eine Lösung $\bar{x}^i(t)$ von Modell 2.3 zur Endnachfrage $f^i(t)$ wollen wir Teillösung nennen. Sind $\bar{x}^i(t)$ für i=1,...,n Teillösungen von i, so stellt die Summe $\bar{x}(t) = \sum_i \bar{x}^i(t)$ eine Lösung von Modell 2.3 zur Endnachfrage $f(t) = \sum_i f^i(t)$ dar. Umgekehrt läßt sich offenbar jede Lösung $\bar{x}(t)$ als Summe von Teillösungen $\bar{x}^i(t)$ zu $f^i(t)$ schreiben. Damit erhalten wir aus den Ergebnissen von Kapitel 1 folgenden Satz:

Satz 2.12: (i) Ist $w_i < \lambda_1$ für alle i=1,...,n, wo λ_1 die Rate gleichgewichtigen Wachstums des homogenen Systems ist, so besitzt Modell 2.3 für beliebige Ausgangsstruktur der Endnachfrage $f(o) \geqq o$ eine nichtnegative Lösung. Diese ist für irreduzibles A positiv.

(ii) Sei A irreduzibel. Ist $w_i \geqq \lambda_1$ für ein i, so existiert unabhängig von der Ausgangsstruktur $f(o) \geqq o$ (mit $f_i(o) > o$) keine nichtnegative Lösung von Modell 2.3.

Beweis: (i) Wegen $w_i < \lambda$ stellt nach Satz 2.3 (i)

$$(2.52)\quad \bar{x}^i(t) = (1+w_i)^t\,(E-A-w_iB)^{-1}f^i(o)$$

für jedes i eine nichtnegative Teillösung zu $f^i(t)$ dar. Die Summe dieser Teillösungen ist damit eine nichtnegative Lösung von Modell 2.3, die für irreduzibles A nach Satz 1.2 positiv ist.

(ii) Sei K die Indexmenge derjenigen Sektoren, in denen die Endnachfrage mit der größten vorkommenden Rate $\bar{w}$ ($\bar{w} \geqq \lambda_1$) wächst, und sei $f^K(t) = \sum_{i\in K} f^i(t)$. Für jedes $i \notin K$ sei $\bar{x}_i(t)$ eine Teillösung zu $f^i(t)$,

die asymptotisch mit der Rate w_i wächst (Satz 1.3, (iii)). Ist $\bar{x}(t)$ eine Lösung zu $f(t)$, so stellt

$$(2.52)\quad \bar{x}^K(t) = \bar{x}(t) - \sum_{i \notin K} \bar{x}^i(t)$$

eine Lösung zur Endnachfrage $f^K(t) = (1+\bar{w})^t f^K(o)$ dar. Diese Lösung muß nach Satz 1.3 (i) auch negative Komponenten haben. Da sie aber asymptotisch mit der Rate $\bar{w}$ wächst (Satz 1.3,(ii)), kann

$$(2.53)\quad \bar{x}(t) = \bar{x}^K(t) + \sum_{i \notin K} \bar{x}^i(t)$$

nicht für alle t nichtnegativ sein, denn alle $\bar{x}^i(t)$ wachsen asymptotisch langsamer als mit der Rate $\bar{w}$.//

Die Bedingung $w_i < \lambda_1$ für alle $i=1,\ldots,n$ stellt somit für irreduzible Inputkoeffizientenmatrizen eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer nichtnegativen Lösung von Modell 2.3 dar.[1]

Existenz einer nichtnegativen Lösung für reduzibles A. Für eine reduzible Inputkoeffizientenmatrix A betrachten wir wieder deren Zerlegung in Irreduzibilitätskomponenten gemäß (2.2). λ^I bezeichne die zur

---

1 Stone und Brown verzichten in [39] auf die Angabe notwendiger oder hinreichender Bedingungen für die Nichtnegativität der von ihnen abgeleiteten Lösung. Mathur gibt die Bedingung $w_i < \lambda_1$ als notwendig und hinreichend an, ohne diese Aussage auf den Fall einer irreduziblen Inputkoeffizientenmatrix zu beschränken [23, S. 76]. Mukerji gibt dieselbe Bedingung als hinreichend an und wirft die Frage nach der Existenz von nichtnegativen Lösungen beim Nichterfülltsein der Bedingung auf [2o, S. 81]. Wir werden weiter unten sehen, daß diese Bedingung für reduzible Inputkoeffizientenmatrizen in der Tat nicht notwendig ist.

verschieden) mit derselben Rate w_i wachsen. Eine Lösung $\bar{x}^i(t)$ von Modell 2.3 zur Endnachfrage $f^i(t)$ wollen wir Teillösung nennen. Sind $\bar{x}^i(t)$ für i=1,...,n Teillösungen von i, so stellt die Summe $\bar{x}(t) = \sum_i \bar{x}^i(t)$ eine Lösung von Modell 2.3 zur Endnachfrage $f(t) = \sum_i f^i(t)$ dar. Umgekehrt läßt sich offenbar jede Lösung $\bar{x}(t)$ als Summe von Teillösungen $\bar{x}^i(t)$ zu $f^i(t)$ schreiben. Damit erhalten wir aus den Ergebnissen von Kapitel 1 folgenden Satz:

Satz 2.12: (i) Ist $w_i < \lambda_1$ für alle i=1,...,n, wo λ_1 die Rate gleichgewichtigen Wachstums des homogenen Systems ist, so besitzt Modell 2.3 für beliebige Ausgangsstruktur der Endnachfrage $f(o) \geqq o$ eine nichtnegative Lösung. Diese ist für irreduzibles A positiv.

(ii) Sei A irreduzibel. Ist $w_i \geqq \lambda_1$ für ein i, so existiert unabhängig von der Ausgangsstruktur $f(o) \geqq o$ (mit $f_i(o) > o$) keine nichtnegative Lösung von Modell 2.3.

Beweis: (i) Wegen $w_i < \lambda$ stellt nach Satz 2.3 (i)

$$(2.52)\quad \bar{x}^i(t) = (1+w_i)^t\,(E-A-w_iB)^{-1}f^i(o)$$

für jedes i eine nichtnegative Teillösung zu $f^i(t)$ dar. Die Summe dieser Teillösungen ist damit eine nichtnegative Lösung von Modell 2.3, die für irreduzibles A nach Satz 1.2 positiv ist.

(ii) Sei K die Indexmenge derjenigen Sektoren, in denen die Endnachfrage mit der größten vorkommenden Rate $\bar{w}$ ($\bar{w} \geqq \lambda_1$) wächst, und sei $f^K(t) = \sum_{i \in K} f^i(t)$. Für jedes $i \notin K$ sei $\bar{x}_i(t)$ eine Teillösung zu $f^i(t)$,

die asymptotisch mit der Rate w_1 wächst (Satz 1.3, (iii)). Ist $\bar{x}(t)$ eine Lösung zu $f(t)$, so stellt

$$(2.52)\quad \bar{x}^K(t) = \bar{x}(t) - \sum_{i \notin K} \bar{x}^i(t)$$

eine Lösung zur Endnachfrage $f^K(t) = (1+\bar{w})^t f^K(o)$ dar. Diese Lösung muß nach Satz 1.3 (i) auch negative Komponenten haben. Da sie aber asymptotisch mit der Rate $\bar{w}$ wächst (Satz 1.3,(ii)), kann

$$(2.53)\quad \bar{x}(t) = \bar{x}^K(t) + \sum_{i \notin K} \bar{x}^i(t)$$

nicht für alle t nichtnegativ sein, denn alle $\bar{x}^i(t)$ wachsen asymptotisch langsamer als mit der Rate $\bar{w}$.//

Die Bedingung $w_i < \lambda_1$ für alle $i=1,\ldots,n$ stellt somit für irreduzible Inputkoeffizientenmatrizen eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer nichtnegativen Lösung von Modell 2.3 dar.[1]

Existenz einer nichtnegativen Lösung für reduzibles A. Für eine reduzible Inputkoeffizientenmatrix A betrachten wir wieder deren Zerlegung in Irreduzibilitätskomponenten gemäß (2.2). λ^I bezeichne die zur

---

1 Stone und Brown verzichten in [39] auf die Angabe notwendiger oder hinreichender Bedingungen für die Nichtnegativität der von ihnen abgeleiteten Lösung. Mathur gibt die Bedingung $w_i < \lambda_1$ als notwendig und hinreichend an, ohne diese Aussage auf den Fall einer irreduziblen Inputkoeffizientenmatrix zu beschränken [23, S. 76]. Mukerji gibt dieselbe Bedingung als hinreichend an und wirft die Frage nach der Existenz von nichtnegativen Lösungen beim Nichterfülltsein der Bedingung auf [2o, S. 81]. Wir werden weiter unten sehen, daß diese Bedingung für reduzible Inputkoeffizientenmatrizen in der Tat nicht notwendig ist.

kann

$$(2.58)\quad \bar{x}(t) = \bar{x}^K(t) + \bar{x}^L(t) + \bar{x}^M(t)$$

wegen (2.55) und (2.56) nicht für alle t nichtnegativ sein.//

Aus Satz 2.13 folgt auch für reduzible Inputkoeffizientmatrizen:

Satz 2.14: Zu $f(o) \geqslant o$ existiert genau dann eine nichtnegative Lösung von Modell 2.3, wenn zu jedem $f^i(t)$ für i=1,...,n eine nichtnegative Teillösung existiert.//

Satz 2.14 besagt, daß zwischen den realisierbaren sektoralen Wachstumsraten w_i keine "Konkurrenzbeziehung" besteht: Die Höchstgrenze des möglichen Wachstums w_i der Endnachfrage nach Gütern des Sektors i hängt nicht ab von den übrigen Wachstumsraten w_j, $j \neq i$[1]. Für jeden Sektor i ist diese Höchstgrenze dabei gegeben durch das "schwächste Glied" in der Kette der Irreduzibilitätskomponenten, die Vorleistungen für den Sektor i zu erbringen haben.

Beispiele. Zur Veranschaulichung der abgeleiteten Ergebnisse betrachten wir die in § 2, Tabelle 2.1 dargestellten Beispiele. Die Irreduzibilitätskomponenten I sind hier jeweils gerade die Sektoren 1,2 und 3, so daß wir λ^I für I=1,2 und 3 jeweils als inverses Element des 1., 2. und 3. Koeffizienten der

---

1 Dies ist eine Aussage über die Existenz von gleichgewichtigen Wachstumspfaden (von Modell 2.3). In einer realen Situation, die gekennzeichnet ist durch knappe Kapazitäten, sind natürlich die für die einzelnen Endnachfragekomponenten möglichen Wachstumsraten nicht unabhängig voneinander.

Hauptdiagonale von $(E-A)^{-1}B$ erhalten. (λ_1, λ_2 und λ_3 stellen in unserer Terminologie dagegen die in nach aufsteigender Größe geordneten Eigenwerte dar.)

In Beispiel 1 lautet die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer nichtnegativen Lösung von Modell 2.3 zu beliebigem $f(o) \geq o$

$$(2.59) \quad \begin{aligned} w_1 &< \lambda^1 = \lambda_3 = o.12 \\ w_2 &< \text{Min}\{\lambda^1, \lambda^2\} = \lambda_2 = o.1o \\ w_3 &< \text{Min}\{\lambda^1, \lambda^3\} = \lambda_1 = o.o8 \end{aligned}$$

Für beispielsweise $(w_1, w_2, w_3) = (o.11, o.o9, o.o5)$ existiert also eine nichtnegative Lösung. Die Struktur der Teillösungen $\bar{x}^i(t)$ lassen sich dabei aus den Spalten der entsprechenden Matrizen $(E-A-w_iB)^{-1}$ ablesen. Man erhält als Lösung

$$(2.6o) \quad \bar{x}(t) = 1.11^t \begin{bmatrix} 16.67 \\ o. \\ o. \end{bmatrix} f_1(o) + 1.o9^t \begin{bmatrix} 7o. \\ 2o. \\ o. \end{bmatrix} f_2(o) + 1.o5^t \begin{bmatrix} 8.33 \\ o. \\ 5.oo \end{bmatrix} f_3(o).$$

Auch in Beispiel 2 ist für die Endnachfrage eines Sektors (Sektor 1) ein Wachstum mit einer größeren Rate als λ_1 (= o.1o) möglich, was sich in der Nichtnegativität der ersten Spalte von $(E-A-wB)^{-1}$ für w = o.11 niederschlägt. In den Beispielen 3 und 4 dagegen ist der kleinste Eigenwert λ_1 (λ_1 = o.1o bzw. λ_1 = o.o8) eine einheitliche Schranke für die Wachstumsraten der Endnachfrage für alle Sektoren, da jeder Sektor Vorleistungen aus der Irreduzibilitätskomponente 1 (= Sektor 1) benötigt, und dieser nur mit einer Rate kleiner als λ_1 wachsen kann.

Eine alternative Ableitung der Lösung von Modell 2.3.
Wir wollen hier noch eine andere Ableitung einer Lösung von Modell 2.3 betrachten, die eine weitere Verallgemeinerung bezüglich der Voraussetzung über die Endnachfrage zuläßt.[1]

Sei f(t) der gemäß (2.5o) vorgegebene Pfad der Endnachfragevektoren. $x^1(t)$ sei dann derjenige Pfad von Produktionsmengen, der in jeder Periode gerade die Befriedigung der jeweiligen Endnachfrage ermöglichen würde, ohne daß dabei irgendwelche Investitionen zur Kapazitätserhöhung berücksichtigt werden, also

(2.61) $x^1(t) = Lf(t)$ für alle t,

wo $L = (E-A)^{-1}$ die Leontief-Inverse bezeichnet. Der auf diesem Pfad gegebenen Zuwachs der Produktionsmengen $\Delta x^1(t) = x^1(t+1) - x^1(t)$ ist dann

(2.62) $\Delta x^1(t) = L\Delta f(t) = LWf(t)$ für alle t.

Die Investitionen, die zur Erzielung eines derartigen (2.62) Kapazitätszuwachses notwendig sind, sind

(2.63) $z^1(t) = B\Delta x^1(t) = BLWf(t)$ für alle t.

Fragt man jetzt nach demjenigen Pfad $x^2(t)$ von Produktionsmengen, auf dem in jeder Periode über die Befriedigung der Endnachfrage f(t) auch noch Investitionen in der Höhe $z^1(t)$ möglich sind, so ergibt sich:

---

1 Dieser Ansatz geht auf Stone und Brown [39] zurück, die (weiter unten betrachtete) Verallgemeinerung auf Mukerji [3o].

(2.64) $x^2(t) = L(f(t)+z^1(t)) = L[E+BLW]\ f(t)$ für alle t.

Dieser Pfad weist folgenden Zuwachs in den Produktionsmengen auf:

(2.65) $\Delta x^2(t) = L[E+BLW]\ \Delta f(t) = L[E+BLW]W\ f(t)$ für alle t.

Diese Zuwächse entsprechen nicht den durch die Investitionen $z^1(t)$ bewirkten Kapazitätserweiterungen. Vielmehr wären für Kapazitätserweiterungen in Höhe von $\Delta x^2(t)$ Investitionen in der Höhe von $z^2(t)$ erforderlich:

(2.66) $z^2(t) = B\Delta x^2(t) = [BLW+(BL)^2W^2]\ f(t)$ für alle t.

Der Pfad $x^3(t)$ von Produktionsmengen, der neben der Befriedigung der Endnachfrage f(t) diese Investitionen zuläßt, wird gegeben durch:

(2.67) $x^3(t) = L(f(t)+z^2(t)) = L[E+BLW+(BL)^2W^2]\ f(t)$ für alle t.

Fährt man nach dem so angefangenen Verfahren fort, so erhält man

(2.68) $x^\nu(t) = L[E + (BL)W + \ldots + (BL)^{\nu-1}W^{\nu-1}]\ f(t)$,

(2.69) $\Delta x^\nu(t) = L[E + (BL)W + \ldots + (BL)^{\nu-1}W^{\nu-1}]W\ f(t)$,

(2.7o) $z^{\nu+1}(t) = [(BL)W + \ldots + (BL)^\nu W^\nu]\ f(t)$,

jeweils für alle t. Konvergiert die in eckigen Klammern stehende Summe von Matrizen (für ν gegen unendlich) gegen eine endliche Matrix, so erfüllt

$$(2.71)\quad \bar{x}(t) = L \sum_{\nu=0}^{\infty} (BL)^{\nu} W^{\nu} f(t)$$

die Gleichung

$$(2.72)\quad \bar{x}(t) = A\bar{x}(t) + B\Delta\bar{x}(t) + f(t)$$

und stellt somit eine Lösung von Modell 2.3 dar. Da alle Summanden in (2.71) nichtnegativ sind, ist diese Lösung nichtnegativ.

Eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Summe ist $|w_i \mu_j| < 1$ für alle i und j, wo μ_j die Eigenwerte von $BL = B(E-A)^{-1}$ sind[1], also die Bedingung $w_i < \lambda_1$ für alle i. Diese Bedingung ist, wie sich zeigen läßt, für irreduzible Matrizen A auch notwendig, während die entsprechende notwendige (und hinreichende) Bedingung für reduzible Matrizen A die in Satz 2.13 angegebene ist.

Ein allgemeiner Ansatz zur Beschreibung der Endnachfrage. In die Ableitung der Lösung (2.71) ging die Tatsache, daß W eine Diagonalmatrix ist, nicht ein. (2.71) stellt im Falle der Konvergenz der Summe also eine Lösung für ein Modell 2.4 dar, dessen Endnachfrage für eine beliebige Matrix W durch

$$(2.73)\quad f(t+1) = (E+W)f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{11}f_1(t) + \ldots + w_{1n}f_n(t) \\ \vdots \\ w_{n1}f_1(t) + \ldots + w_{nn}f_n(t) \end{bmatrix}$$

---

1 Um das einzusehen, schreibe man $(BL)^{\nu}$ als

$$T^{-1} \begin{bmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{bmatrix}^{\nu} T,$$

wo T die Matrix der Eigenvektoren von BL ist.

beschrieben wird. Der Ansatz (2.73) ist dem einfachen Ansatz sektorspezifischer Wachstumsraten der Endnachfrage insofern überlegen, als er geeignet ist, Substitutionsvorgänge innerhalb der Endnachfrage als Ursache für eine sich ändernde Struktur der Endnachfrage zu erfassen.

Eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Summe in (2.71) ist $|w_i| < \lambda_1$,[1] wo die Werte w_i jetzt als Eigenwerte von W zu interpretieren sind. Eine hinreichende Bedingung für die Nichtnegativität der Lösung (2.71) für allgemeines W ist die Nichtnegativität von W. Beide Bedingungen sind jedoch nicht notwendig, die die Nichtnegativität betreffende auch nicht im Falle einer irreduziblen Inputkoeffizientenmatrix A (wie man leicht sogar für Diagonalmatrizen W sieht).

---

1 Vgl. dazu die Fußnote auf der vorigen Seite.

Kapitel 3 Geschlossene dynamische Input-Output-Mengenmodelle

§ 1 Endogenisierung der Endnachfrage

Formulierung von Modell 3.1. Bisher setzten wir die Endnachfrage als autonom mit einer gegebenen Rate w (bzw. sektoralen Raten w_i) wachsend voraus. Eine bessere Beschreibung der in der Realität gegebenen Zusammenhänge erhält man zweifellos, wenn man die gegenseitigen Abhängigkeiten zwischen dem Wachstum der Endnachfrage und der Entwicklung der übrigen, im Modell endogenen Größen berücksichtigt. Eine Möglichkeit der modellmäßigen Erfassung der Abhängigkeit der Endnachfrage von anderen wirtschaftlichen Aktivitäten in der Input-Output-Analyse bieten sektorale Endnachfragefunktionen vom Typ der Keynesschen Konsumfunktion.[1]

Wir gehen im folgenden davon aus, daß die Endnachfrage nur zum Teil autonom bestimmt ist ($f^{aut}(t)$), zum Teil dagegen vom in der jeweiligen Periode erzielten Volkseinkommen abhängt oder induziert wird ($f^{ind}(t)$):

$$(3.1) \quad f(t) = f^{aut}(t) + f^{ind}(t) \text{ mit } f^{aut}(t) \geqq o,$$

$$f^{ind}(t) \geqq o.$$

Vom autonomen Teil der Endnachfrage wollen wir - wie in Modell 1 - annehmen, er wachse mit einer konstanten, für alle Sektoren einheitlichen Rate w:[2]

---

1 Vgl. zu diesem Ansatz etwa Schumann [37, S. 73 ff, S. 225 ff].

2 Wie in Kapitel 2, § 5 lassen sich natürlich die Ergebnisse auf den Fall unterschiedlicher sektoraler Wachstumsraten übertragen.

(3.2) $f^{aut}(t) = (1+w)^t f^{aut}(o)$,

während wir für $f^{ind}(t)$ die Annahme eines Wachstums proportional zum Volkseinkommen Y(t) machen:

(3.3) $$f^{ind}(t) = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} Y(t) = cY(t),$$

wo c der nichtnegative Vektor der sektoralen marginalen Endnachfrageneigungen ist. Das Volkseinkommen oder die Wertschöpfung setzt sich zusammen aus der Wertschöpfung $y_j(t)$ der einzelnen Sektoren j, die wir hier als proportional zum Output ansehen wollen:

(3.4) $y_j(t) = v_j x_j(t)$

mit $v = (v_1,\ldots,v_n)$ als (Zeilen-)Vektor der Wertschöpfungskoeffizienten, so daß wir erhalten:

(3.5) $Y(t) = \sum_j y_j(t) = vx(t)$.

Für jeden Sektor i stellt

(3.6) $f_i(t) = (1+w)^t f_i^{aut}(o) + c_i Y(t)$

damit eine lineare Endnachfragefunktion dar, deren "konstantes Glied" im Zeitablauf mit Rate w wächst, die sich also im Zeitablauf ständig nach oben verschiebt.

Setzt man (3.1) bis (3.5) anstelle der in Kapitel 1 die Endnachfrage beschreibende Gleichung (1.8) in (1.7) ein, so erhält man:

Kapitel 3 Geschlossene dynamische Input-Output-Mengenmodelle

§ 1 Endogenisierung der Endnachfrage

Formulierung von Modell 3.1. Bisher setzten wir die Endnachfrage als autonom mit einer gegebenen Rate w (bzw. sektoralen Raten w_i) wachsend voraus. Eine bessere Beschreibung der in der Realität gegebenen Zusammenhänge erhält man zweifellos, wenn man die gegenseitigen Abhängigkeiten zwischen dem Wachstum der Endnachfrage und der Entwicklung der übrigen, im Modell endogenen Größen berücksichtigt. Eine Möglichkeit der modellmäßigen Erfassung der Abhängigkeit der Endnachfrage von anderen wirtschaftlichen Aktivitäten in der Input-Output-Analyse bieten sektorale Endnachfragefunktionen vom Typ der Keynesschen Konsumfunktion.[1]

Wir gehen im folgenden davon aus, daß die Endnachfrage nur zum Teil autonom bestimmt ist ($f^{aut}(t)$), zum Teil dagegen vom in der jeweiligen Periode erzielten Volkseinkommen abhängt oder induziert wird ($f^{ind}(t)$):

$$(3.1) \quad f(t) = f^{aut}(t) + f^{ind}(t) \text{ mit } f^{aut}(t) \geq o, \quad f^{ind}(t) \geq o.$$

Vom autonomen Teil der Endnachfrage wollen wir - wie in Modell 1 - annehmen, er wachse mit einer konstanten, für alle Sektoren einheitlichen Rate w:[2]

---

1 Vgl. zu diesem Ansatz etwa Schumann [37, S. 73 ff, S. 225 ff].

2 Wie in Kapitel 2, § 5 lassen sich natürlich die Ergebnisse auf den Fall unterschiedlicher sektoraler Wachstumsraten übertragen.

$$(3.2)\quad f^{aut}(t) = (1+w)^t f^{aut}(o),$$

während wir für $f^{ind}(t)$ die Annahme eines Wachstums proportional zum Volkseinkommen Y(t) machen:

$$(3.3)\quad f^{ind}(t) = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} Y(t) = cY(t),$$

wo c der nichtnegative Vektor der sektoralen marginalen Endnachfrageneigungen ist. Das Volkseinkommen oder die Wertschöpfung setzt sich zusammen aus der Wertschöpfung $y_j(t)$ der einzelnen Sektoren j, die wir hier als proportional zum Output ansehen wollen:

$$(3.4)\quad y_j(t) = v_j x_j(t)$$

mit $v = (v_1,\ldots,v_n)$ als (Zeilen-)Vektor der Wertschöpfungskoeffizienten, so daß wir erhalten:

$$(3.5)\quad Y(t) = \sum_j y_j(t) = vx(t).$$

Für jeden Sektor i stellt

$$(3.6)\quad f_i(t) = (1+w)^t f_i^{aut}(o) + c_i Y(t)$$

damit eine lineare Endnachfragefunktion dar, deren "konstantes Glied" im Zeitablauf mit Rate w wächst, die sich also im Zeitablauf ständig nach oben verschiebt.

Setzt man (3.1) bis (3.5) anstelle der in Kapitel 1 die Endnachfrage beschreibende Gleichung (1.8) in (1.7) ein, so erhält man:

$$(3.7)\quad x(t) = Ax(t) + B(x(t+1)-x(t)) + f^{aut}(t) + cvx(t)$$

$$= Zx(t) + B(x(t+1)-x(t)) + (1+w)^t f^{aut}(o)$$

mit $Z = A+cv$. Ein Element $z_{ij} = a_{ij} + c_i v_j$ der Matrix Z gibt an, welche Produktionsmenge aus Sektor i pro produzierter Mengeneinheit im Sektor j erforderlich ist, und zwar an direkten Vorleistungen (a_{ij}) und an durch die Produktion in Sektor j induzierter Endnachfrage ($c_i v_j$). Den mit (3.7) beschriebenen Zusammenhang wollen wir als Modell 3.1 bezeichnen.

Lösung des Modells. Modell 3.1 hat mit Z anstelle von A und $f^{aut}(t)$ anstelle von f(t) formal genau dieselbe Struktur wie Modell 1. Setzen wir für A Irreduzibilität voraus, so ist auch Z irreduzibel. Die Irreduzibilität von Z (und nur diese wird im folgenden benutzt) folgt, wie man sich leicht klar macht, aber auch ohne die von A, wenn wir von v die Positivität voraussetzen, was bedeutet, daß in jedem Sektor eine von Null verschiedene Wertschöpfung pro produzierter Einheit erzielt wird, und wenn wir weiter davon ausgehen, daß der Vektor der marginalen Endnachfrageneigungen c die Bedingung (2.3) aus Kapitel 2, § 1 erfüllt, was bedeutet, daß jeder Sektor direkt oder indirekt mindestens einen Sektor beliefert, für dessen Güter eine positive marginale Konsumneigung besteht.

Die 2. Eigenschaft der Inputkoeffizientenmatrix A, die wir für die Lösung von Modell 1 gebraucht haben, ist, daß ihr maximaler Eigenwert kleiner als 1 ist. Für Z gilt:

Satz 3.1: Der maximale Eigenwert von Z ist kleiner als 1 genau dann, wenn die Summe C der marginalen sektoralen Konsumneigungen kleiner ist als 1.

Beweis: Seien die Mengeneinheiten für die n Güter gerade so gewählt, daß eine Mengeneinheit jeweils gerade den Preis 1 hat. Da sich die Wertschöpfung als Überschuß des Wertes der Produktion über den Wert der eingesetzten Vorleistungen ergibt, gilt dann für jeden Sektor j:

$$(3.8) \quad v_j = 1 - \sum_i a_{ij}.$$

Für die Spaltensummen von Z gilt mit (3.8):

$$(3.9) \quad \sum_i z_{ij} = \sum_i (a_{ij}+c_i v_j) = \sum_i a_{ij} + Cv_j = 1 - (1-C)v_j,$$

sie sind also kleiner als, gleich oder größer als 1 genau dann, wenn C kleiner als, gleich oder größer als 1 ist, woraus die Behauptung nach Satz A.7, (v) folgt.//

Die Bedingung, daß der maximale Eigenwert von A kleiner ist als 1, besagt (vgl. Satz A.5, (II) $\Leftrightarrow$ (IV)), daß es mit der durch A beschriebenen Produktionsstruktur möglich ist, einen Output zu erzeugen, der größer ist als der zu seiner Produktion notwendige Input an laufenden Vorleistungen. Die Bedingung, daß der maximale Eigenwert von Z kleiner ist als 1, besagt entsprechend, daß es bei der durch A beschriebenen Produktionsstruktur und der durch (3.3) und (3.4) beschriebenen induzierten Endnachfrage möglich ist, einen Output zu erzeugen, der größer ist als der zu seiner Produktion notwendige Input zuzüglich der durch diese Produktion induzierten Endnachfrage. Dies ist offenbar eine für die Möglichkeit zu Wachstum notwendige Bedingung. Wir wollen daher im folgenden von $C < 1$ ausgehen.

Für die Lösungen von Modell 3.1 gelten damit alle über Modell 1 gemachte Aussagen entsprechend. Ist λ_1 der dem Betrage nach kleinste Eigenwert von $B^{-1}(E-Z)$, so existiert also für jede Wachstumsrate $w < \lambda_1$ der autonomen Endnachfrage ein nichtnegativer Pfad proportionalen Wachstums aller Produktionsmengen mit der Rate w, dessen Struktur $\bar{x}(o)$ gegeben ist durch

$$(3.1o) \quad \bar{x}(o) = (E-Z-wB)f^{aut}(o).$$

Diesen Pfad wollen wir wieder als die gleichgewichtige Lösung von Modell 3.1 bezeichnen, während wir λ_1 und die zu λ_1 gehörige Basislösung die gleichgewichtige Wachstumsrate bzw. den gleichgewichtigen Wachstumspfad zum homogenen Teil von Modell 3.1 nennen werden.

Vergleich mit Modell 1. Auf dem gleichgewichtigen Wachstumspfad von Modell 3.1 zu einer gegebenen Wachstumsrate w der autonomen Endnachfrage wachsen die Produktionsmengen und damit auch die induzierte Endnachfrage ebenfalls mit der Rate w. Auf diesem Pfad spielt die Unterscheidung in autonome und induzierte Endnachfrage also gewissermaßen gar keine Rolle. Diese Aussage läßt sich in folgendem Satz präzisieren:

Satz 3.2: Gegeben sei eine exogene Endnachfrage $f(t) = (1+w)^t f(o)$ in Modell 1 mit der zu dieser Endnachfrage gehörigen Gleichgewichtslösung $\bar{x}(t) = (1+w)^t \bar{x}(o)$. Betrachtet man einen beliebigen Teil der Endnachfrage als endogen, also eine beliebige Zerlegung

$$(3.11) \qquad f(o) = f^{aut}(o) + f^{ind}(o),$$

so stimmt die gleichgewichtige Lösung $\bar{\bar{x}}(t)$ von Modell 3.1, das durch diese Zerlegung

und den Vektor $\bar{x}(o)$ definiert ist, für eine Wachstumsrate der autonomen Endnachfrage von w mit dem Gleichgewichtspfad $\bar{x}(t)$ von Modell 1 überein.

Beweis: Wenn $f^{ind}(o)$ die in Periode o induzierte Endnachfrage ist, so ist der Vektor c der marginalen Konsumneigungen für Modell 3.1 durch

$$(3.12)\quad c\bar{Y}(o) = f^{ind}(o)$$

bestimmt, wo $\bar{Y}(o) = v\bar{x}(o)$ die Wertschöpfung der Periode o ist. Zu zeigen ist, daß dann

$$(3.13)\quad \bar{\bar{x}}(o) = (E-Z-wB)^{-1}f^{aut}(o)$$

gleich

$$(3.14)\quad \bar{x}(o) = (E-A-wB)^{-1}f(o)$$

ist. Das ist aber klar, denn $\bar{x}(o)$ erfüllt die ($\bar{\bar{x}}(o)$ definierende) Gleichung

$$(3.15)\quad (E-Z-wB)\bar{x}(o) = (E-A-wB)\bar{x}(o) - cv\bar{x}(o)$$
$$= f(o) - f^{ind}(o) = f^{aut}(o).$$ //

Satz 3.2 könnte zu dem Schluß verleiten, es sei unbedeutend, welcher Anteil der Endnachfrage als induziert und welcher als autonom anzusehen ist. Das gilt aber nur, wenn in der geschilderten Weise die Gleichgewichtslösungen beider Modelle miteinander verglichen werden, bei denen die Höhe der Wachstumsrate exogen (für beide Modelle gleich) vorgegeben ist. Während in Modell 1 nun die Gleichgewichtslösung des inhomogenen Modells die einzige auch langfristig plausible Lösung ist, da jede Lösung vom 2. Typ (charakterisiert

durch Annäherung an den Gleichgewichtspfad des homogenen Teils) die Eigenschaft hat, daß der Anteil der Endnachfrage an der gesamten Produktion für wachsendes t gegen Null konvergiert, kommt den Lösungen vom 2. Typ im Modell 3.1 durchaus Bedeutung zu. Zwar nimmt auch für sie der Anteil der Endnachfrage an der Produktion im Zeitablauf ab (da die autonome Endnachfrage relativ kleiner wird), er konvergiert aber nicht gegen Null, sondern gegen einen konstanten Anteil, der durch die Höhe von C, also den Teil der Wertschöpfung, der zu induzierter Endnachfrage wird, bestimmt ist.

Die Höhe der gleichgewichtigen Wachstumsrate des homogenen Teils von Modell 3.1 hängt nun aber ganz wesentlich von dem als endogen angesetzten Teil der Endnachfrage ab, denn es gilt:

Satz 3.3: Sind c^a und c^b zwei alternative Vektoren von marginalen Konsumneigungen mit $c^a \leqq c^b$, so gilt für die zugehörigen Wachstumsraten des homogenen Teils von Modell 3.1: $\lambda_1^a > \lambda_1^b$.

Beweis: Mit $c^a \leqq c^b$ gilt $Z^a \leqq Z^b$, $(E-Z^a)^{-1} \leqq (E-Z^b)^{-1}$ und damit

$$(3.16) \qquad (E-Z^a)^{-1}B \leqq (E-Z^b)^{-1}B,$$

woraus für die entsprechenden maximalen Eigenwerte von $(E-Z)^{-1}B$ nach Satz A.7, (vii) folgt: $\mu_1^a < \mu_1^b$ und damit die Behauptung $\lambda_1^a = 1/\mu_1^a > \lambda_1^b = 1/\mu_1^b$. //

Die obere Grenze λ_1 des möglichen Wachstums ist in Modell 3.1 also um so kleiner, je mehr Endnachfrage als endogen bestimmt anzusehen ist.[1] Das entspricht

1 Setzt man in der Situation von Satz 3.2 $f^{aut}(o) = o$, so resultiert $w = \lambda_1$.

der an früherer Stelle festgestellten Tatsache, daß eine "große" Wachstumsrate in Modell 1 nur mit im Vergleich zur Endnachfrage großen Produktionsmengen zu realisieren ist (vgl. Gleichung (1.17)), also mit einem kleinen Anteil der Endnachfrage an der Produktion. Ist dagegen dieser Anteil in Form von induzierter Endnachfrage vorgegeben, so ist nicht mehr jede in Modell 1 realisierbare Wachstumsrate möglich. Da diese Situation der Realität wohl näher kommt, dürfte Modell 3.1 eher als Modell 1 dazu geeignet sein, die Wachstumsmöglichkeiten einer Volkswirtschaft aufzuzeigen.

Als Grenzfall von Modell 3.1 erhalten wir für $f^{aut}(t) = o$ ein vollständig geschlossenes Modell, das wir als Modell 3.1 mit vollständig endogenisierter Endnachfrage bezeichnen wollen. Es wird beschrieben durch ein System homogener Differenzengleichungen; seine Lösungen hängen somit nicht mehr von einer exogen vorgegebenen Wachstumsrate, sondern nur noch von der durch A und B beschriebenen Produktionsstruktur und dem Endnachfrageverhalten, wie es in c zum Ausdruck kommt, ab.[1] Im wesentlichen (bis auf eine gegebenenfalls mögliche Überlagerung durch andere Basislösungen) besitzt ein Modell 3.1 mit vollständig endogenisierter Endnachfrage also eine einzige nichtnegative Lösung, den durch λ_1 und e_1 beschriebenen Wachstumspfad.

Im folgenden wollen wir Modell 3.1 mit vollständig endogenisierter Endnachfrage zugrunde legen, so daß wir anstelle von f^{ind} wieder einfach f schreiben können.

---

1 Vgl. aber § 2.

§ 2 Die Abhängigkeit der Lösung des Mengenmodells mit endogenisierter Endnachfrage von Wertgrößen

Im Gegensatz zu den ersten beiden Kapiteln, deren Modelle ganz in realen Größen, idealisiert als Mengengrößen vorstellbar, formuliert sind, geht in Modell 3.1 die Wertgröße Volkseinkommen ein. Modell 3.1 ist damit nicht wie die vorangegangenen Modelle unabhängig von Preisen zu formulieren; die von uns im vorigen Paragraphen angenommene Konstanz der Wertschöpfungskoeffizienten v_j sowie die Konstanz der marginalen Endnachfrageneigungen beruht vielmehr auf der Unterstellung gegebener, konstanter Preise. In diesem Paragraphen soll die Abhängigkeit der Lösungen von Modell 3.1 vom zugrunde liegenden Preissystem, sowie eine kleine Verallgemeinerung des Ansatzes dargestellt werden.

Die Abhängigkeit für c und v vom Preissystem. Wertgrößen sollen in diesem Paragraphen durch den hochgestellten Index "n" (nominal) gekennzeichnet werden, "Mengengrößen" dagegen wie bisher unindiziert bleiben. Ist $p = (p_1,\ldots,p_n)$ ein Vektor von Preisen für die n Güter der Volkswirtschaft, so gelten also die Zusammenhänge

$$(3.17)\quad x^n = \hat{p}x, \qquad f^n = \hat{p}f$$

usw., wo $\hat{p}$ die aus p gebildete Diagonalmatrix bezeichnet. Die sich beim Preissystem p ergebende Wertschöpfung ist für einen Sektor j gegeben durch

$$(3.18)\quad y_j^n(t) = x_j^n(t) - \sum_i x_{ij}^n(t) = (p_j - \sum_i a_{ij}p_i)\, x_j,$$

die gesamte Wertschöpfung also duch

$$(3.19)\quad Y^n(t) = \sum_j y_j^n(t) = p(E-A)x(t),$$

was für die Wertschöpfungskoeffizienten bedeutet: $v^n = p(E-A)$.

Bei der Beschreibung der Endnachfrage in Abhängigkeit vom Volkseinkommen wollen wir bezüglich der Reaktion auf die Preise zwei Hypothesen unterscheiden:

A. Endnachfrage mit Substitution: Die wertmäßige Endnachfrage f_i^n nach Gütern aus Sektor i ist proportional zum nominalen Volkseinkommen:

$$(3.2o) \quad f^n(t) = cY^n(t).$$

Die reale Endnachfrage f_i ergibt sich daraus als f_i^n/p_i, also:

$$(3.21) \quad f(t) = \hat{p}^{-1} f^n(t) = \hat{p}^{-1} cY^n(t) .$$

Für eine Änderung der Preisstruktur wird also eine Substitution der realen Endnachfrage von den relativ teureren zu den relativ billigeren Gütern unterstellt. Eine Änderung des Preisniveaus bei Konstanz der Preisstruktur bleibt ohne Einfluß auf die reale Endnachfrage. Nach (3.2o) wird wegen

$$(3.22) \quad F^n(t) = \sum f_i^n(t) = \sum_i c_i \; Y^n(t)$$

unabhängig von den Preisen der konstante Anteil $C = \sum_i c_i$ der nominalen Wertschöpfung als nominale Endnachfrage wirksam.

B. Endnachfrage ohne Substitution. Die reale Endnachfrage f_i nach Gütern aus dem Sektor i ist proportional zum "realen" Volkseinkommen Y^r, das aus dem nominalen Volkseinkommen durch Preisbereinigung mit einem Endnachfrage-Preisindex P ermittelt wird:

$$(3.23)\quad f(t) = cY^r(t) \text{ mit } Y^r(t) = \frac{Y^n(t)}{P} = \frac{Y^n(t)}{\sum_i p_i c_i / \sum_i c_i},$$

also:

$$(3.24)\quad f(t) = c(uc/pc)\, Y^n(t),$$

wo u zur Abkürzung der Schreibweise den "Summationsvektor" (1,...,1) bezeichnet.

Hier ist also die reale Endnachfragestruktur konstant (unabhängig von den Preisen), während die nominale Endnachfragestruktur $\hat{p}c(uc/pc)$ von den relativen Preisen abhängt. Eine Änderung des Preisniveaus bei konstanter Preisstruktur bleibt wieder ohne Einfluß auf die reale Endnachfrage. Die Gesamthöhe der nominalen Endnachfrage stellt wegen

$$(3.25)\quad F^n(t) = pf(t) = pc(uc/pc)\, Y^n(t) = uc\, Y^n(t)$$

wieder einen konstanten Anteil $C = \sum_i c_i$ am nominalen Volkseinkommen dar.

Setzt man das Volkseinkommen (3.19) in (3.21) bzw. (3.24) ein, so resultieren folgende Beziehungen zwischen der Produktion x(t) und der durch sie induzierten Endnachfrage f(t):

(3.26.A) $f(t) = \hat{p}^{-1}cp(E-A)\,x(t)$,

(3.26.B) $f(t) = c(uc/pc)p(E-A)\,x(t)$.

Für p = u entsprechen sie der Beziehung (3.3/4). Für allgemeines p erhält man aus (3.26) die zugehörigen Matrizen Z als

(3.27.A) $Z = A + \hat{p}^{-1}cp(E-A)$,

(3.27.B) $Z = A + c(uc/pc)p(E-A)$.

Sie bringen zum Ausdruck, daß die in Paragraph 1 abgeleitete Lösung des Mengenmodells 3.1 mit endogenisierter Endnachfrage von den Preisen abhängt, die man bei seiner Formulierung (als konstant) zugrunde legt.

Berücksichtigung der Verteilung des Volkseinkommen. In Modell 3.1 haben wir für das Volkseinkommen als ganzes einheitliche marginale Endnachfrageneigungen unterstellt. Es ist jedoch ohne weiteres möglich, verschiedene Einkommenskategorien k, k=1,...,m (etwa Lohn, Zins und Gewinn wie in Kapitel 5) mit unterschiedlichen marginalen Endnachfrageneigungen zu berücksichtigen. Sind etwa $v^1,\ldots,v^m$ die Wertschöpfungskoeffizientenvektoren[1] der Einkommenskategorien 1,...,m (bei einem gegebenen Preissystem) und sind $c^1,\ldots,c^m$ die entsprechenden Vektoren der marginalen Endnachfrageneigungen (bei

1 Also v_j^k = Einkommen der Kategorie k pro in Sektor j produzierter Mengeneinheit.

demselben gegebenen Preissystem), so ist die durch die Einkommenskategorie k induzierte Endnachfrage

$$(3.28)\quad f^k(t) = c^k v^k x(t)$$

und somit die insgesamt induzierte Endnachfrage

$$(3.29)\quad f(t) = \sum_{k=1}^{m} f^k(t) = CVx(t),$$

wo C die aus den Spaltenvektoren c_k und V die aus den Zeilenvektoren v_k gebildeten Matrizen sind.

Ersetzt man Z = A+cv durch Z = A+CV, so erhält man die entsprechenden Ergebnisse wie in Paragraph 1 für den hier beschriebenen allgemeineren Ansatz. Zusätzlich zu der im vorangegangenen beschriebenen Abhängigkeit der Lösung von den zugrunde gelegten Preisen wird damit die Abhängigkeit auch von der Verteilung des Volkseinkommens deutlich.

§ 3 Das allgemeine geschlossene Input-Output-Mengenmodell

Modell 3.1 als (n+1)-Sektoren-Modell. Das Modell 3.1 mit vollständig endogener Endnachfrage beschreibende Differenzengleichungssystem

$$(3.3o)\quad x(t) = Ax(t) + B(x(t+1)-x(t)) + cY(t)$$

$$(3.31)\quad Y(t) = vx(t)$$

läßt sich auch schreiben als

$$(3.32)\quad \underline{x}(t) = \underline{A}\underline{x}(t) + \underline{B}(\underline{x}(t+1)-\underline{x}(t))$$

mit

(3.33) $\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ Y(t) \end{bmatrix}$, $\underline{A} = \begin{bmatrix} A & c \\ v & o \end{bmatrix}$ und $\underline{B} = \begin{bmatrix} B & o \\ o & o \end{bmatrix}$.

(3.32) ist ein Differenzengleichungssystem mit n+1 Variablen, das formal genau dem homogenen Teil von Modell 1 entspricht. Y(t) wollen wir auch mit $x_{n+1}(t)$ bezeichnen. Faßt man den Bereich der Einkommensentstehung und -verwendung als einen (n+1)-ten "Produktions"-Sektor auf, so ist auch inhaltlich eine Entsprechung gegeben. Die Koffizienten c_i der letzten Spalte von $\underline{A}$ sind dann zu interpretieren als die Inputkoeffizienten, die der Sektor n+1, den wir vereinfachend als Sektor der privaten Haushalte bezeichnen wollen, zur Bereitstellung seines Outputs, vereinfacht: der Arbeit benötigt. Die Koeffizienten v_j der letzten Zeile von $\underline{A}$ sind entsprechend zu interpretieren als die (Arbeits-)Inputkoeffizienten, die die in den übrigen Sektoren 1,...,n notwendigen Vorleistungen aus Sektor n+1 angeben. In dieser Interpretation stellt die Arbeit entsprechend den anderen Gütern einen durch die Höhe der zu ihrer Reproduktion verwandten Inputs limitierten Produktionsfaktor dar.

Im Gegensatz zu der in Paragraph 1 gegebenen Interpretation von Modell 3.1 ist diese Formulierung unabhängig vom Preissystem.

Anmerkung zur Singularität von $\underline{B}$. In (3.32) hat die Matrix $\underline{B}$ nur den Rang n. Bei einer "direkten" Lösung von (3.32) (im Gegensatz zur Lösung in Paragraph 1) sind also die Ergebnisse von Kapitel 1, § 2 zu berücksichtigen. Die Bedingung der Zulässigkeit, der die Vektoren $\underline{x}(t)$ einer Lösung genügen müssen (vgl. 2.19/2o)), ist hier, daß für $\underline{z}(t) = (E-\underline{A})\underline{x}(t)$ $z_{n+1}(t) = o$ ist, daß also der Sektor der privaten Haushalte gerade so viel Arbeit produziert, wie als laufender Input benötigt wird: $x_{n+1}(t) = vx(t)$. Die λ_i bestimmen sich als Inverse der von Null verschie-

denen Eigenwerte von $(E-\underline{A})^{-1}\underline{B}$, die wegen

$$(3.34)\quad (E-\underline{A})^{-1} = \begin{bmatrix} (E-Z)^{-1} & (E-A)^{-1}c/(1 - v(E-A)^{-1}c) \\ v(E-Z)^{-1} & 1/(1 - v(E-A)^{-1}c) \end{bmatrix},$$

$$(3.35)\quad (E-\underline{A})^{-1}\underline{B} = \begin{bmatrix} (E-Z)^{-1}B & o \\ v(E-Z)^{-1}B & o \end{bmatrix},$$

wo Z wieder als A+cv definiert ist, mit denen von $(E-Z)^{-1}B$ übereinstimmen.

Das allgemeine geschlossene Input-Output-Mengenmodell. Die Nullspalte der Matrix $\underline{B}$ bringt zum Ausdruck, daß zur Produktion von Arbeit kein Kapital notwendig ist, die Nullzeile von $\underline{B}$ bedeutet, daß Arbeit nicht als Bestandsgröße entsprechend den Kapitalbeständen an Gütern der übrigen Sektoren zur Produktion erforderlich ist.

Ein Modell, das durch (3.32) mit allgemeiner Matrix $\underline{B}$ (und $a_{n+1,n+1}$ nicht notwendig o) beschrieben wird, wollen wir allgemeines geschlossenes Input-Output-Mengenmodell, oder kurz Modell 3.2 nennen.[1] Die Koeffizienten der letzten Spalte von $\underline{B}$ stellen diejenigen Investitionen dar, die zur Erhöhung der "Produktion" des Sektors der privaten Haushalte um eine Einheit Arbeit erforderlich sind. Darunter können langlebige Konsumgüter und Wohnungen verstanden werden, sowie Schulen, Krankenhäuser und allgemein Infrastruktur für den Bereich der privaten Haushalte.[2]

1 Auch dieses Modell geht zurück auf Leontief [18]. Vgl. aber auch Hawkins [9].

2 Man denke dabei etwa an eine Steigerung der Arbeitsleistung durch steigende Bevölkerung oder durch Beschäftigung ausländischer Arbeitnehmer oder auch an eine Steigerung der in Effizienzeinheiten gemessenen Arbeit bei konstanter Zahl von Beschäftigten, die höhere Qualifikationen und damit Investitionen im Ausbildungsbereich erforderlich macht.

Zur Interpretation einer von Null verschiedenen (n+1)-ten Zeile von $\underline{B}$ hat man sich vor Augen zu halten, daß in die "Produktions"-sphäre des Sektors der privaten Haushalte nicht nur einfach die Reproduktion der physischen Arbeitskraft gehört, sondern auch der Bereich der Ausbildung. Die in diesem Bereich erbrachte Leistung ist insoweit einem Investitionsgut vergleichbar, als sie nicht im laufenden Produktionsprozeß untergeht (wie die geleisteten Arbeitsstunden und die übrigen Vorleistungen), sondern ein Leistungspotential darstellt, das wie die übrigen Kapitalgüter erforderlich ist zur Produktion, selbst aber über mehrere Perioden hinweg vorhanden bleibt. In diesem Sinne werden durch die Koeffizienten $b_{n+1,j}$ $(j=1,\ldots,n+1)$ die Mehrerfordernisse an Ausbildung (etwa ausgebildete Facharbeiter, Spezialisten) wiedergegeben, die in den einzelnen Sektoren j zur Erhöhung ihrer Kapazität um eine Ausbringungseinheit erforderlich sind.

Für die Lösungen von Modell 3.2 gelten alle Aussagen über den homogenen Teil von Modell 1 aus Kapitel 1. Es besitzt also (im wesentlichen) - wie Modell 3.1 mit vollständig endogener Endnachfrage - genau eine nichtnegative Lösung: den durch die zu λ_1 gehörige Basislösung beschriebenen Wachstumspfad.

Kapitel 4 Zur Interpretation des dynamischen Input-Output-Mengenmodells

Die Möglichkeit der relativen Instabilität des dynamischen Input-Output-Mengenmodells und insbesondere die Tatsache, daß in empirischen Arbeiten diese Möglichkeit für eine Reihe von Volkswirtschaften als gegeben nachgewiesen wurde, hat in der Literatur zu einer ausführlichen Diskussion über den Wert des Leontiefschen Ansatzes als Beitrag zur Erklärung der Realität geführt.[1] Als Ergebnis dieser Diskussion konzentrierte sich die weitere auf Anwendungen des dynamischen Input-Output-Modells ausgerichtete Forschung zum einen auf die Untersuchung von Linearen Programmierungsmodellen unter Zugrundelegung von (verallgemeinerten) Input-Output-Produktionsstrukturen,[2] zum anderen wurde eine Vielzahl von ökonometrischen Modellen mit einem Input-Output-Teil entwickelt,[3] denen gemeinsam ist, daß die Dynamik der in ihnen beschriebenen zeitlichen Entwicklung der Produktionsmengen auf andere Modellteile zurückgeht und nicht auf den intertemporalen Zusammenhängen beruht, wie sie den reinen dynamischen Input-Output-Modellen zugrunde liegen.

---

1 Vgl. dazu beispielsweise Leontief [19], [2o], Sargan [35], [36], Dorfman, Samuelson und Solow [3, S. 281-3oo], Jorgenson [12], [13], McManus [24], Wurtele [44], Petri [33].

2 Diese Weiterentwicklung des dynamischen Input-Output-Modells geht zurück auf Dorfman, Samuelson und Solow [3, S. 281-3oo]. Für Anwendungen dieses Ansatzes vgl. etwa Tsukui [41], [42].

3 Etwa das Brookings-Modell: Duesenberry, Fromm, Klein und Kuh [4], das Wharton-Modell: Preston [34] und das Bonner disaggregierte Prognosemodell: Krelle [15], [16], um nur einige der bekanntesten Modelle zu nennen.

In diesem Kapitel wollen wir eben diese in dynamischen Input-Output-Modellen resultierenden zeitlichen Entwicklungen der Produktionsmengen analysieren, um zu einem besseren Verständnis der beobachteten Instabilität zu gelangen.

§ 1 Die zwei Arten der Instabilität des dynamischen Input-Output-Modells

Die Instabilität des Harrod-Domarschen Wachstumsmodells. Dynamische Input-Output-Modelle können als Verallgemeinerungen der Ein-Sektor-Wachstumsmodelle des von Harrod und Domar eingeführten Typs auf eine n-Sektoren-Volkswirtschaft aufgefaßt werden. Betrachtet man nämlich etwa die einem geschlossenen Input-Output-Modell[1] zugrunde liegende Differenzengleichung für den Fall n = 1, so erhält man

$$(4.1) \quad x(t) = ax(t) + b\Delta x(t),$$

wo a, b und x(t) jetzt skalare Größen darstellen. Aufgelöst nach $\Delta x(t)$:

$$(4.2) \quad \Delta x(t) = \frac{1-a}{b}\, x(t),$$

ergibt sich in (1-a)/b die dem Eigenwert λ_1 von $B^{-1}(E-A)$ entsprechende gleichgewichtige Wachstumsrate. Sie ist zu interpretieren als diejenige Rate, mit der die Investitionen z(t) wachsen müssen, damit in jeder Periode die durch diese Investitionen neu geschaffenen Produktionskapazitäten $\Delta x(t) = (1/b)z(t)$ aufgrund der Vorleistungs- und Konsumnachfrage ax(t) und der Investitionsnachfrage z(t) gerade voll ausgelastet sind.

1 Wir beschränken uns hier auf die Betrachtung geschlossener Modelle, weil die zu analysierende Instabilität aus dem homogenen Teil der entsprechenden Differenzengleichungssysteme resultiert.

Identifiziert man das Harrod-Domarsche Modell mit der Gleichung (4.1), so stellt sich innerhalb dieses Modells gar nicht die Frage nach der Stabilität seiner Lösungen (im Sinne der Konvergenz aller möglichen Lösungen gegen eine bestimmte Lösung): (4.1) besitzt als lineare Differenzengleichung 1. Ordnung genau eine Lösung zu jedem Anfangswert, diese Lösung besteht stets in einem Pfad mit der Rate (1-a)/b wachsender Größen. Geht man also aus von einer Situation in Periode o, in der die Produktion (und die Kapazität) die Höhe x(o) hat, Vorleistungen und Konsumgüter in Höhe von ax(o) nachgefragt werden und die Differenz x(o)-ax(o) investiert wird, so ergibt sich stets gleichgewichtiges Wachstum mit der Rate (1-a)/b.

Die bekannte Eigenschaft der Harrod-Domarschen Lösung, ein Wachstum "auf des Messers Schneide" zu beschreiben, ergibt sich erst, wenn man Überlegungen anstellt, die über die mit (4.1) beschriebene Gleichgewichtssituation hinausgehen, wenn man also nach der Entwicklung fragt, die sich ergibt, wenn in einer Periode o die Kapazitäten durch x(o) gegeben sind, die Summe aus nachgefragten Vorleistungen einschließlich Konsumgütern ax(o) und geplanten (nachgefragten) Investitionsgütern z(o) aber nicht der durch die Kapazität gegebenen Menge x(o) entspricht: $x(o) \leqq ax(o)+z(o)$. In bekannter Weise ergibt sich dann aus der plausiblen Hypothese, daß die Unternehmer ein größeres (kleineres) Wachstum der Investitionen planen, wenn Über- (bzw. Unter-) nachfrage herrscht, das Ergebnis, daß eine einmal vorhandene Lücke zwischen Angebot (Kapazität) und Nachfrage die Tendenz hat, immer größer zu werden.

Die Instabilität des dynamischen Input-Output-Modells. Derartige Überlegungen haben wir bei der Diskussion der Stabilität der dynamischen Input-Output-Modelle bisher gar nicht angestellt. Wir gingen vielmehr stets davon aus, daß Investitionen in einer der Gleichung

$$(4.3) \quad x(t) = Ax(t) + B\Delta x(t)$$ [1]

entsprechenden Höhe, also in Höhe von

$$(4.4) \quad z(t) = x(t) - Ax(t)$$

getätigt würden. Die sich ergebende Instabilität, daß nämlich für jede in ihrer Struktur von der des Eigenvektors e_1 abweichende Anfangssituation x(o) die durch (4.3) beschriebene Entwicklung zu negativen Mengen führt,[2] ist also gewissermaßen eine Instabilität, die innerhalb des durch (4.3) beschriebenen Modells besteht, trotz (oder wie wir im nächsten Paragraphen sehen werden: wegen) zu jedem Zeitpunkt gegebener Vollauslastung der Kapazitäten. Sie ist damit eine Instabilität anderer Art als die des Harrod-Domarschen Modells.

Zusätzlich stellt sich auch im dynamischen Input-Output-Modell die Frage nach der resultierenden Entwicklung für eine Situation, in der die geplanten Investitionen z(t) nicht mit den durch (4.4) gegebenen, mit dem Gleichgewichtsmodell (4.3) verträglichen Investitionen übereinstimmen. Mit den entsprechenden Annahmen über das Reagieren der Investitionsplanung bei Über- bzw.

---

1 Hier bezeichnet x(t) wieder einen Vektor, A und B Matrizen.

2 Jedenfalls für den Fall vollständiger Instabilität, wovon wir im folgenden der einfacheren Formulierbarkeit wegen ausgehen wollen.

Unterauslastung der Kapazitäten ergibt sich auch hier die Tendenz zur Verstärkung eines einmal aufgetretenen Ungleichgewichts.

Das dynamische Input-Output-Modell weist also zwei Arten von Instabilität auf, deren eine (wie im Harrod-Domar-Modell) außerhalb des eigentlichen, eine gleichgewichtige Situation beschreibenden Modells im (postulierten) Investitionsverhalten der Unternehmer bei Ungleichgewicht begründet liegt und deren andere (die im Harrod-Domar-Modell wegen des Aggregationsgrades nicht zu identifizieren ist) innerhalb des Modells, also bei ständiger Vollauslastung der Kapazitäten auftritt. Diese zweite Art der (In-) Stabilität wollen wir als (In-)Stabilität im engeren Sinne bezeichnen.

§ 2 Das dynamische Input-Output-Modell als Gleichgewichtsmodell

In Kapitel 1 haben wir das Modell 1 beschreibende Differenzengleichungssystem (1.7) abgeleitet als Beschreibung aller Produktionsmengenpfade, auf denen in jeder Periode eine volle Auslastung der Kapazitäten möglich ist. Für jede Periode t stellt (1.7) die Bedingung dar, der die Kapazitätsausweitung $\Delta x(t)$ genügen muß, damit die zu ihrer Realisierung erforderlichen Investitionen gerade so hoch sind, daß sie zusammen mit der Vorleistungs- und Endnachfrage eine Produktion in Höhe der gegebenen Kapazitäten $x(t)$ ausmachen.

Interpretiert man die dynamischen Input-Output-Modelle ausschließlich in diesem Sinne, so kommt der Frage nach Stabilität der Lösungen im engeren Sinne keinerlei Bedeutung zu. Die Modelle lassen dann lediglich die Aussage zu, daß genau ein nichtnegativer Pfad für die Produktionsmengen existiert (bzw. ein 2. Typ von Lösungen in offenen Modellen), der der oben angegebenen Bedingung genügt, während alle anderen Pfade, die sich (rein mathematisch) als Lösung des jeweils zugrunde liegenden Differenzengleichungssystems ergeben, negative Werte annehmen.[1]

Wesentlich wird die Frage nach der Stabilität der Lösungen eines dynamischen Input-Output-Modells, wenn man dieses als ein deskriptives Modell interpretiert. Man unterstellt dann, daß irgendwelche, im Modell nicht beschriebenen Kräfte darauf hin wirken, daß die zugrunde gelegte Gleichgewichtsbedingung (wenigstens approximativ) erfüllt ist, so daß eine Lösung des Gleichgewichtsmodells zugleich (zumindest annähernd) die tatsächliche Entwicklung beschreibt, die sich aufgrund möglicherweise sehr viel komplizierterer als der im Modell beschriebenen Wirkungszusammenhänge ergibt.[2]

---

1 Zur Verdeutlichung betrachte man eine Situation, in der die Kapitalkoeffizientenmatrix B den Rang 1 hat, was bedeutet, daß die Kapitalstruktur in allen Sektoren gleich (oder Null) ist. Nach den Ergebnissen von Kapitel 2, § 2 gibt es dann nur eine Basislösung des homogenen Systems, ein geschlossenes Modell hat also überhaupt nur eine Lösung (bis auf ein Vielfaches). Diese ist dann natürlich stabil im engeren Sinne, ohne daß dadurch etwa etwas über eine Tendenz tatsächlicher Entwicklungen zu dieser Lösung hin ausgesagt wäre.

2 In diesem Sinne ist etwa die in der Grenzproduktivitätstheorie unterstellte Gleichheit von Lohn- bzw. Zinssatz mit der Grenzproduktivität der Arbeit bzw. des Kapitals zu interpretieren.

Um deutlich zu machen, welcher Art diese Kräfte sein müssen, wollen wir die in Modell 1 angenommene Gleichgewichtsbedingung näher analysieren. Abbildung 4.1 stellt für Modell 1 den die zeitliche Entwicklung der Produktionsmengen bewirkenden "Mechanismus" schematisch dar. Die gegebenen Kapazitäten x(t) der Periode t

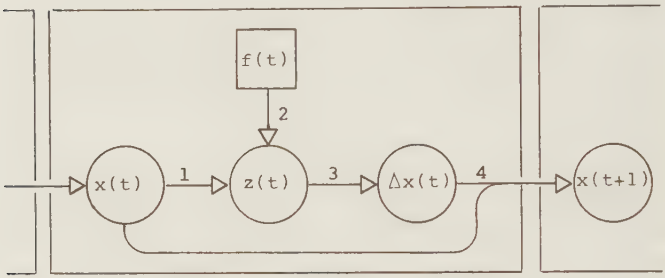

Abbildung 4.1: Schematische Darstellung von Modell 1

ermöglichen bei gegebener Endnachfrage f(t) Investitionen in Höhe von $z(t) = x(t)-Ax(t)-f(t)$ (Pfeile 1 und 2). Diese wiederum ermöglichen eine Erhöhung der Kapazitäten um den Betrag $\Delta x(t) = B^{-1}z(t)$ (Pfeil 3), wodurch (Pfeil 4) die Kapazitäten der Folgeperiode determiniert sind.

Diese mögliche Entwicklung wird (jedenfalls approximativ) auch realisiert, wenn

1. die Tendenz besteht, die jeweils vorhandenen Kapazitäten voll zu nutzen, wodurch also x(t) gleichzeitig Produktion und Kapazität beschreibt, und
2. die Tendenz besteht, die dann jeweils für Investitionen disponierbaren Mengen z(t) nach Maßgabe der Gleichung

(4.5) $$z(t) = B\Delta x(t)$$

zu Investitionszwecken zu verwenden.

Die erste Bedingung ist unmittelbar klar und kann als plausibel angesehen werden. Die zweite Bedingung beinhaltet zum einen die Aussage, daß tendenziell die realisierten Investitionen in ihrer Gesamthöhe mit den realisierbaren übereinstimmen. Ob das in der Realität der Fall ist, ist die Frage nach Stabilität eines Harrod-Domarschen Wachstumspfades. Die zweite Bedingung beinhaltet für eine n-Güter-Volkswirtschaft darüber hinaus noch eine Aussage über die Verteilung der verfügbaren Investitionsgüter auf die einzelnen investierenden Sektoren. Dies ist der Punkt, der für die Instabilität der dynamischen Input-Output-Modelle im engeren Sinne verantwortlich ist.

Während (4.5) "von rechts nach links gelesen" die Investitionsgütermengen angibt, die zur Realisierung eines gegebenen Vektors $\Delta x(t)$ von Kapazitätssteigerungen erforderlich sind, gibt (4.5) "von links nach rechts gelesen" diejenigen Kapazitätssteigerungen $\Delta x(t)$ an, die gegebene Mengen $z(t)$ an Investitionsgütern gerade restlos aufbrauchen. Nun sind bei verfügbaren Investitionsgütern in Höhe von $z(t)$ eine Fülle von Aufteilungen dieser Investitionen auf die einzelnen Sektoren möglich. So sind alle Kapazitätserweiterungen $\Delta x(t)$ mit

(4.6) $$B\Delta x(t) \leqslant z(t)$$

realisierbar,[1] wobei das aus (4.5) resultierende $\Delta x(t)$ als einziges die Eigenschaft hat, alle verfügbaren

1 Dorfman, Samuelson und Solow sprechen in diesem Zusammenhang von einer "kausalen Indeterminiertheit" der dynamischen Input-Output-Modelle [3, S. 297 ff].

Mengen auch restlos aufbrauchen.

Die sich aus Modell 1 ergebenden Produktionsmengenpfade als Beschreibung tatsächlicher Entwicklungen zu interpretieren, heißt also soviel wie ein Investitionsverhalten zu unterstellen, das eine Verteilung der verfügbaren Investitionsgüter auf die einzelnen Sektoren nach dem Kriterium "Aufteilung ohne Rest" bewirkt.[1] Nun kann im allgemeinen nicht a priori ausgeschlossen werden, daß andere als die im Modell beschriebenen Zusammenhänge in Richtung auf eine Erfüllung dieses Kriteriums wirken.[2] Den empirischen Ergebnissen nach ist das jedoch nicht der Fall, denn die empirisch festgestellte Instabilität[3] bedeutet nach Kapitel 1, §3 ja, daß die von gegebenen Anfangswerten aus im Modell resultierende Entwicklung in der Regel zu negativen Produktionsmengen führt.

Modell 1 und die anderen dynamischen Input-Output-Modelle, denen der in Abbildung 4.1 dargestellte "Mechanismus" zugrunde liegt, können damit nicht als deskriptive Modelle interpretiert werden, sondern lediglich als Modelle, die die Bedingungen gleichgewichtigen Wachstums beschreiben.

---

1 Im Falle einer singulären Kapitalkoeffizientenmatrix B ist dieses Kriterium , da es nicht zu einer eindeutigen Aufteilung führt, noch zu ergänzen durch die Bedingung, daß die Aufteilung so geschieht, daß auch in der jeweils folgenden Periode eine Aufteilung ohne Rest möglich wird. Vgl. dazu Kapitel 2, § 2.

2 Zu Überlegungen in dieser Richtung vgl. auch den nächsten Paragraphen.

3 Vgl. dazu Fußnote 1 auf Seite 2o.

Gleichung (4.5) als Investitionsnachfragefunktion zu interpretieren, bedeutet, da $\Delta x(t) = x(t+1)-x(t)$ eine zukünftige Produktionssteigerung ist, $\Delta x(t)$ als eine Erwartungsgröße anzusehen. Gleichzeitig $\Delta x(t)$ als durch Gleichung (4.3) gegeben anzusetzen, heißt dann, von den Erwartungen anzunehmen, sie gingen in die Richtung einer Aufteilung der verfügbaren Investitionsgüter ohne Rest, und führt damit zu denselben unrealistischen Ergebnissen. Lediglich für den Pfad gleichgewichtigen Wachstums ist die Interpretation von $\Delta x(t)$ als Erwartungsgröße plausibel. Ist die Wirtschaft in der Vergangenheit mit einer konstanten Rate w gewachsen, so ist es sinnvoll anzunehmen, sie werde auch in der Zukunft mit dieser Rate w wachsen. Sieht man in dieser Situation $\Delta x(t)$ (definiert als $wx(t)$) als Erwartungsgröße an, und interpretiert (4.5) als Investitionsnachfragefunktion, so resultiert (jetzt aus einer Verhaltensannahme, nicht aus einer Gleichgewichtsbedingung) der gleichgewichtige Lösungspfad.

Für eine (und nur diese eine) spezielle Situation, nämlich, daß die Volkswirtschaft sich auf dem Gleichgewichtspfad befindet, kann die Lösung eines dynamischen Input-Output-Gleichgewichtsmodells also auch explikativ gedeutet werden. In Kapitel 7 werden wir allgemeine explikative Input-Output-Modelle beschreiben, die ungleichgewichtig im hier betrachteten Sinne sind, indem sie Situationen beschreiben, in denen nicht (notwendig) in jeder Periode volle Auslastung der Kapazitäten gegeben ist, die aber die Eigenschaft haben, gerade die gleichgewichtige Lösung eines jeweils zugehörigen Gleichgewichtsmodells als stabile Lösung zu besitzen.

Diese Modelle können als (mögliche) Präzisierung der oben erwähnten, in den dynamischen Input-Output-Gleichgewichtsmodellen nicht beschriebenen Kräfte angesehen werden, die in Richtung auf eine Realisierung der jeweiligen Gleichgewichtslösung - nicht der übrigen Lösungen - hin wirken.

In Modell 2.1 haben wir anstelle von (4.5) den Zusammenhang

$$(4.7) \quad z(t) = B(x(t)-x(t-1))$$

zugrunde gelegt. (4.7) läßt sich als Investitionsnachfrage in Abhängigkeit von realisierten (nicht von erwarteten) Produktionssteigerungen interpretieren.[1] (4.7) stellt in diesem Sinne eine "vollständige" Investitionsnachfragefunktion dar im Gegensatz zu Gleichung (4.5), die noch durch eine Hypothese über die Höhe der erwarteten Produktionssteigerungen $\Delta x(t)$ zu ergänzen ist. Interessanterweise ergab die Diskussion der Stabilität (der Gleichgewichtslösung des homogenen Teils) von Modell 2.1 in Kapitel 2, § 3 denn auch eine größere Wahrscheinlichkeit für eine empirisch gegebene Stabilität.

§ 3 Ansätze zur Analyse der Ursache der Instabilität der dynamischen Input-Output-Modelle

Da empirisch die (meist sogar vollständige) relative Instabilität der dynamischen Input-Output-Gleichgewichtsmodelle nachgewiesen wurde, ist die Frage interessant, welche speziellen Eigenschaften der Input-

---

1 Dabei ist allerdings zu beachten, daß die Höhe der Produktionssteigerung ihrerseits von der Investitionsnachfrage abhängt. Die Investitionsnachfrage paßt sich also gewissermaßen unendlich schnell an die Produktionssteigerung an.

koeffizientenmatrix A und der Kapitalkoeffizientenmatrix B für diese Instabilität verantwortlich sind. Da Voraussetzungen wie Nichtnegativität von A und B, Invertierbarkeit von B, Irreduzibilität von A und positive Invertierbarkeit von E-A nur zu den in Kapitel 1, § 3 gemachten Aussagen über die Stabilität ausreichen, nach denen sowohl Stabilität als auch Instabilität möglich ist, muß die festgestellte Instabilität auf weitergehenden Gemeinsamkeiten der empirisch gegebenen Matrizen A und B beruhen, als sie in diesen Voraussetzungen zum Ausdruck kommen. Es ist bisher nicht gelungen, diese Gemeinsamkeiten herauszukristallisieren und damit die Eigenschaften einer durch A und B beschriebenen Produktionsstruktur aufzudecken, die Ursache der Instabilität der dynamischen Input-Output-Modelle sind.[1] Wir werden in diesem Paragraphen Ansätze zur Lösung dieser Frage darstellen. Dabei werden wir die Stabilitätsbedingung (1.35) analysieren, also die Frage nach der Stabilität eines homogenen Systems untersuchen.

Der Fall "n = 2". Für ein 2-Sektoren-Modell läßt sich die Stabilitätsbedingung explizit angeben. Sei dazu:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix},$$

(4.8)

$$(E-A)^{-1}B = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}.$$

Wie man leicht nachrechnet, gilt:

---

1 Vgl. dazu aber Morishima [28, S. 635 f], wo für eine Modell 3.1 entsprechende Situation nachgewiesen wird, daß sich, wenn Z-B nichtnegativ und irreduzibel ist, vollständige relative Instabilität ergibt.

$$(4.9)\quad s_{11} = ((1-a_{22})b_{11} + a_{12}b_{21}) / d$$

$$s_{12} = ((1-a_{22})b_{12} + a_{12}b_{22}) / d$$

$$s_{21} = (a_{21}b_{11} + (1-a_{11})b_{21}) / d$$

$$s_{22} = (a_{21}b_{12} + (1-a_{11})b_{22}) / d$$

mit $d = \det(E-A) = (1-a_{11})(1-a_{22})-a_{12}a_{21}$.

Die Eigenwerte μ_1 und μ_2 von $(E-A)^{-1}B$ berechnen sich als

$$(4.10)\quad \begin{aligned} \mu_1 &= x+y \\ \mu_2 &= x-y \end{aligned}$$

mit

$$(4.11)\quad \begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}(s_{11}+s_{22}) > 0 \\ y &= \tfrac{1}{2}\sqrt{(s_{11}+s_{22})^2 - 4(s_{11}s_{22}-s_{12}s_{21})} > 0. \end{aligned}$$

Die Stabilitätsbedingung $1+\lambda_1 > |1+\lambda_2|$ mit $\lambda_i = 1/\mu_i$ für i=1,2 läßt sich nun mit (4.10) ausdrücken als

$$(4.12)\quad y^2 - x^2 > x,$$

woraus man durch einsetzen von (4.11) erhält:

$$(4.13)\quad s_{12}s_{21} - s_{11}s_{22} > \tfrac{1}{2}(s_{11}+s_{22}).$$

Setzt man in (4.13) schließlich (4.9) ein, so resultiert als Stabilitätsbedingung, der die Matrizen A und B genügen müssen:

$$(4.14)\quad b_{12}b_{21} - b_{11}b_{22} > \tfrac{1}{2}((1-a_{22})b_{11} + (1-a_{11})b_{22} + a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12}).$$

Der Ungleichung (4.14), deren linke Seite mit -det B übereinstimmt, entnimmt man, daß die Stabilität mehr von B als von A abhängt; so gilt, wie unmittelbar aus (4.14) folgt:

Satz 4.1: (i) Aus det B $\geq$ o folgt relative Instabilität.

(ii) Aus det B $\leq -\frac{1}{2}(b_{11}+b_{12}+b_{21}+b_{22})$ folgt relative Stabilität.

Nur für den Fall:

$$(4.15) \quad -\tfrac{1}{2}(b_{11}+b_{12}+b_{21}+b_{22}) < \det B < o$$

kommt es also überhaupt in Bezug auf die Stabilität auf die Inputkoeffizientenmatrix A an.

Nach Satz 4.1 (i) ist relative Stabilität nur möglich, wenn det B < o ist, also wenn die Ungleichung

$$(4.16) \quad \frac{b_{11}}{b_{21}} < \frac{b_{12}}{b_{22}}$$

gilt, deren linke Seite die Kapitalstruktur von Sektor 1 und deren rechte Seite die Kapitalstruktur von Sektor 2 darstellt. Für Stabilität ist also eine notwendige Voraussetzung, daß Sektor 2 relativ (gemessen an der Kapitalstruktur von Sektor 1) mehr Kapitalgüter aus dem Sektor 1 braucht, bzw. der Sektor 1 relativ mehr Kapitalgüter aus dem Sektor 2 benötigt.

Diese Bedingung ist unmittelbar einsichtig, wie folgende Überlegung zeigt: Ergibt sich für eine Periode t ein Vektor x(t), dessen erste Komponente "zu groß" ist gemessen an der gleichgewichtigen Struktur, so ergeben sich auch zu Investitionszwecken disponierbare

Mengen z(t), für die gilt, daß $z_1(t)$ "zu groß" ist. Aus dem "Kriterium" der Aufteilung ohne Rest kann in einer solchen Situation nur dann eine Entwicklung in Richtung auf die Gleichgewichtsstruktur resultieren, wenn gerade der Sektor 2 überwiegend Investitionsgüter aus dem Sektor 1 benötigt bzw. entsprechend Sektor 1 überwiegend Investitionsgüter aus dem Sektor 2.

Relative Stabilität kann also nur vorliegen, wenn in Bezug auf die Kapitalerfordernisse gewissermaßen eine zirkuläre Struktur vorliegt. Da diese Situation in der Realität wohl nicht gegeben ist, ist damit für den Fall n = 2 die Ursache für die Instabilität der dynamischen Input-Output-Modelle lokalisiert.

Die Instabilität für reduzible Produktionsstrukturen. Im Fall n = 2 ergibt sich eine Verwandtschaft der Frage nach Stabilität mit der Frage, ob die Produktionsstruktur mehr linear oder mehr zirkulär sei. Für den Fall einer rein linearen Produktionsstruktur in Bezug auf die Kapitalkoeffizientenmatrix, also $b_{21} = o$ (oder $b_{12} = o$), ergibt sich stets relative Instabilität. Dieses spezielle Ergebnis läßt sich folgendermaßen für beliebiges n verallgemeinern:

Satz 4.2: Für reduzible Inputkoeffizientenmatrizen (mit n verschiedenen Eigenwerten) resultiert stets relative Instabilität.

Beweis: Da $\lambda_1 = 1/\mu_1$ mit μ_1 als dem maximalen Eigenwert von $(E-A)^{-1}B$ ist, reicht es aus, zu zeigen, daß mindestens ein weiterer positiver Eigenwert μ_i von $(E-A)^{-1}B$ existiert, der dann wegen der vorausgesetzten Verschiedenheit der Eigenwerte notwendigerweise kleiner

ist als μ_1, so daß für den entsprechenden Wert $\lambda_i = 1/\mu_i$ gilt: $1+\lambda_1 < 1+\lambda_i$.

Ist nun A (und damit B, vgl. Fußnote 1 auf Seite 21) reduzibel, so ergeben sich die Eigenwerte von $(E-A)^{-1}B$ als die Eigenwerte der positiven Hauptdiagonaluntermatrizen $(E-A^{II})^{-1}B^{II}$ der Zerlegung von A in Irreduzibilitätskomponenten. Jede dieser Matrizen besitzt aber nach dem Theorem von Frobenius einen positiven Eigenwert.//

Die Instabilität resultiert also daraus, daß die gleichgewichtige Wachstumsrate λ_1 die kleinste aller Wachstumsraten ist, mit der einzelne Sektoren oder Gruppen von Sektoren (ohne Berücksichtigung von Lieferungen an bzw. Bezügen von anderen Sektoren) wachsen können.

Kapitel 5 Dynamische Input-Output-Preismodelle

§ 1 Das dynamische offene Input-Output-Preismodell mit Nullgewinnen

Formulierung eines Modells mit Nullgewinnen. Der Gleichgewichtsbedingung des offenen Input-Output-Mengenmodells, daß in jeder Periode die Summe aus Vorleistungen, Investitionen und Endnachfrage für jeden Sektor gerade gleich der durch die Kapazität gegebenen Produktion ist, entspricht im Preismodell die Bedingung, daß die Summe aus Vorleistungskosten und Zahlungen für die primären Inputs für jeden Sektor gerade gleich seinen Erlösen ist. Rechnet man dabei zu den primären Inputs die Unternehmerleistungen und sieht ihre "Entlohnung" als durch einen residual bestimmten Gewinn gegeben an, so ist diese Bedingung definitorisch stets erfüllt. Eine echte Gleichgewichtsbedingung resultiert erst, wenn man für die als Erlöse abzüglich Kosten berechneten Gewinne die Gleichheit mit Gewinnen in vorgegebener Höhe postuliert. Wir wollen damit beginnen, die Zusammenhänge zu analysieren, die sich aus der Forderung von Nullgewinnen ergeben. Aus einer so spezifizierten Gleichgewichtsbedingung resultierende Preissysteme können als Konkurrenzpreissysteme[1] interpretiert werden, indem man vollständige Konkurrenz als Ursache für Gewinne in Höhe von Null ansieht.

Sollen alle Gewinne Null sein, so müssen die Kosten jeden Sektors j in jeder Periode t seinen Erlösen $p_j(t)x_j(t)$ entsprechen, wobei $p_j(t)$ den Preis des

---

1 Schumann benutzt die Bezeichnung "Schattenpreise", um damit die Analogie dieser Preise zu den sich in einem linearen Programmierungs-Input-Output-Mengenmodell ergebenden dualen Variablen auszudrücken; vgl. Schumann [37, S. 61 f].

Gutes j in Periode t bezeichnet. Zu den Kosten gehören die Kosten der von den übrigen Sektoren und aus dem Sektor j selbst bezogenen Vorleistungen, von denen wir annehmen wollen, daß sie zu den Preisen der Periode t zu bezahlen sind, so daß sich dieser Teil der Kosten als $\sum_i a_{ij}x_j(t)p_i(t)$ ergibt. Da die Koeffizienten a_{ij} den Kapitalverzehr mit berücksichtigen (vgl. Kapitel 1, § 1), sind darin die Kosten für die in Periode t zu tätigenden Reinvestitionen bereits enthalten.

Weiter gehören dazu die Kosten, die durch die Bindung des zur Produktion $x_j(t)$ benötigten Kapitals im Wert von $\sum_i b_{ij}x_j(t)p_i(t)$ entstehen. Bringen wir diese mit einem für alle Sektoren einheitlichen Zinssatz r(t) in Anschlag, so ist dieser Teil der Kosten gegeben durch $r(t)\sum_i b_{ij}x_j(t)p_i(t)$.

Schließlich gehört zu den Kosten die Entlohnung des primären Faktors Arbeit.[1] Ist $a_o=(a_{o1},\ldots,a_{on})$ der Arbeitsinputkoeffizientenvektor, dessen Kompomente a_{oj} die Zahl der zur Produktion einer Einheit von Gut j notwendigen Arbeitsstunden angibt, und ist l(t) der für alle Sektoren einheitliche Lohnsatz (Lohn je Arbeitsstunde) in Periode t[2], so ergeben sich im Sektor j Lohnkosten in Höhe von $l(t)a_{oj}x_j(t)$.

---

1 Wir vernachlässigen weitere Kostengrößen wie Importe und Steuern.

2 Sektoral unterschiedliche Lohnsätze bei im Zeitablauf gleichbleibender Struktur der Lohnsätze in den einzelnen Sektoren lassen sich im hier zugrunde gelegten Konzept dadurch berücksichtigen, daß man l(t) als den Lohnsatz eines bestimmten Sektors, etwa von Sektor 1, interpretiert und den Arbeitsinputkoeffizientenvektor a_o ersetzt durch $\tilde{a}_o = (a_{o1}, a_{o2}l_2,\ldots,a_{on}l_n)$, wo l_j für $j = 2,\ldots,n$ das Verhältnis des Lohnsatzes im Sektor j zu dem in Sektor 1 bezeichnet.

Ergeben sich für die Periode t+1 von den Preisen der Periode t abweichende Preise $p(t+1) = p(t) + \Delta p(t)$, so muß zur Gewährleistung von Nullgewinnen von den Kosten des Sektors j noch die (gegebenenfalls negative) Wertsteigerung seines Kapitalbestandes in Höhe von $\sum_i b_{ij} x_j(t) \Delta p_i(t)$ abgezogen werden. Insgesamt stellt somit

$$p_j(t)x_j(t) = \sum_i a_{ij}x_j(t)p_i(t) + r(t)\sum_i b_{ij}x_j(t)p_i(t) + a_{oj}1(t)x_j(t) - \sum_i b_{ij}x_j(t)\Delta p_i(t) \tag{5.1}$$

für jeden Sektor j die Nullgewinn-Gleichgewichtsbedingung für die Periode t dar.[1] Da jeder Summand in (5.1) den Faktor $x_j(t)$ enthält, läßt sich (5.1) auch als Gleichheit von Preis und Stückkosten

$$p_j(t) = \sum_i a_{ij}p_i(t) + r(t)\sum_i b_{ij}p_i(t) + a_{oj}1(t) - \sum_i b_{ij}\Delta p_i(t) \tag{5.2}$$

ausdrücken. Diese Unabhängigkeit von den Mengen beruht (bei der unterstellten linear-limitationalen Produktionsstruktur) darauf, daß wir die Kosten jeweils in ihrer zur Produktion erforderlichen Höhe in Ansatz gebracht haben. In einer Situation, wo der Kapitalbestand eines Sektors die zur Produktion von $x_j(t)$ nötige Höhe übersteigt oder mehr Arbeitskräfte als nötig beschäftigt sind, wäre (5.1) entsprechend zu modifizieren und die daraus gebildete Gleichung (5.2)

---

1 Gleichung (5.1) beruht auf den speziellen Annahmen über die zeitliche Zurechnung der verschiedenen Kostenkomponenten und der Erlöse auf die Perioden. Nimmt man von Vorleistungs- und Lohnkosten der Produktion der Periode t sowie deren Erlösen nicht wie hier an, daß sie zu Preisen der Periode t, sondern daß sie zu Preisen der Periode t+1 in Ansatz zu bringen sind (vgl. z.B. Solow [38, S. 33] oder Schumann [37, S. 2o1 ff]), so ergeben sich gegenüber (5.1) und der nachfolgenden Analyse geringfügige Unterschiede.

würde eine Stückkostendegression bei steigender Kapazitätsauslastung zum Ausdruck bringen. Wenn wir im folgenden von (5.2) in der obigen Form ausgehen, unterstellen wir damit volle Auslastung der Kapazitäten, also Gleichgewicht des Input-Output-Mengenmodells.

Gleichung (5.2) läßt sich auch auf einem anderen, die Konkurrenzpreiseigenschaft der aus (5.2) zu bestimmenden Preise und Preisänderungen deutlich machenden Wege ableiten.[1] Verwendet ein Unternehmer zu Beginn der Periode t einen Geldbetrag in Höhe von $\sum_i b_{ij} p_i(t)$ zum Erwerb der Kapitalgüter $b_{1j},\ldots,b_{nj}$, produziert damit eine Einheit von Gut j und verkauft diese zu Preisen der Periode t, so verfügt er zu Beginn der nächsten Periode über einen Wert von

$$(5.3)\quad \sum_i b_{ij} p_i(t+1) + (p_j(t) - \sum_i a_{ij} p_i(t) - a_{oj} l(t)).$$

Bei vollständiger Konkurrenz müssen die Preise und Preisänderungen gerade so bestimmt sein, daß die sich für den eingesetzten Geldbetrag ergebende Verzinsung für jeden Sektor gleich ist und einer Verzinsung mit dem gegebenen Zinssatz r(t) entspricht. Das heißt, es muß (5.3) gleich

$$(5.4)\quad (1+r(t)) \sum_i b_{ij} p_i(t)$$

sein. Gleichsetzen von (5.3) mit (5.4) ergibt aber gerade (5.2).

In (5.1) wurde keine Verzinsung der Vorleistungskosten in Ansatz gebracht, obwohl es die Regel sein dürfte, daß zwischen Kauf von Vorleistungen und Anfall des

---

1 Vgl. Schumann [37, S. 2o2 f] und Solow [38, S. 33].

Erlöses aus dem Verkauf der damit produzierten Güter eine produktionstechnisch und institutionell bedingte Zeitspanne besteht (die für die verschiedenen Sektoren unterschiedlich sein kann). Die daraus resultierende Kapitalbindung wird jedoch dann adäquat in (5.1) erfaßt, wenn wir in die Kapitalkoeffizienten b_{ij} die pro in einer Periode produzierter Einheit von Gut j im Produktionsprozeß durchschnittlich vorhandene, zur Aufrechterhaltung der Produktion notwendige Menge an laufenden Inputs mit einbeziehen (vgl. Kapitel 1, § 1). Diese Argumentation läßt sich nicht auf gegebenenfalls von den Unternehmern im voraus zu bezahlende Löhne anwenden.[1] Der Einfachheit halber sei hier daher unterstellt, der Zeitpunkt der Fälligkeit der Lohnzahlungen stimme mit dem Zeitpunkt überein, zu dem die Erlöse aus der entsprechenden Arbeit anfallen.

Die Gleichungen (5.2) lassen sich zum linearen Differenzengleichungssystem

$$(5.5)\quad p(t) = p(t)\,(A+r(t)B) + l(t)a_o - \Delta p(t)B$$

zusammenfassen. Die Lösung von (5.5) hängt vom zeitlichen Verlauf der in (5.5) als gegeben angenommenen Größen, des Zinssatzes r(t) und des Lohnsatzes l(t), ab. Wir wollen im Rahmen dieser Analyse für den Zinssatz zeitliche Konstanz unterstellen:

$$(5.6)\quad r(t) = r = \text{konstant}$$

---

1 Dies gilt für das offene Modell. Im allgemeinen abgeschlossenen Input-Output-Preismodell (vgl. Modell 5.4), in dem die Arbeit wie eine Vorleistung erfaßt ist, läßt sich die zeitliche Bindung des Inputs Arbeit dagegen wie bei den übrigen Vorleistungen in der Kapitalkoeffizientenmatrix B erfassen.

und für den Lohnsatz ein Wachstum mit konstanter, nichtnegativer Rate w:

$$(5.7)\quad l(t) = (1+w)^t l(o).$$

Das Wachstum des Lohnsatzes (wobei zu beachten ist, daß l(t) den Nominallohnsatz darstellt) können wir interpretieren als das Bestreben der Arbeitnehmer, ihren Anteil am Volkseinkommen zu vergrößern oder als Reaktion auf erwartete Preissteigerungen. Für w = o ist in (5.7) der Fall eines konstanten Lohnsatzes mit erfaßt. (5.5) zusammen mit (5.6) und (5.7) wollen wir als Modell 5.1 bezeichnen.

Lösung des Modells. Das zu (5.5) (mit (5.6)) gehörige homogene Differenzengleichungssystem lautet

$$(5.8)\quad p(t+1) = p(t)\,((1+r)E - (E-A)B^{-1}).$$

Mit $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ bezeichnen wir die nach steigendem Absolutbetrag geordneten Eigenwerte von $(E-A)B^{-1}$; sie stimmen mit den in Kapitel 1, § 1 (dort ebenso bezeichneten) Eigenwerten von $B^{-1}(E-A)$ überein[1], insbesondere ist λ_1 reell und größer als o.[2] $1+r-\lambda_i$, i=1,...,n, sind dann die Eigenwerte der Matrix des homogenen Systems. Sind q_i, i=1,...,n die zu λ_i (und damit auch zu $1+r-\lambda_i$) gehörigen Linkseigenvektoren, so lautet die allgemeine Lösung von (5.8):

$$(5.9)\quad p(t) = \sum_i \alpha_i (1+r-\lambda_i)^t q_i.$$

---

1 Für zwei quadratische Matrizen M und N stimmt das charakteristische Polynom von MN mit dem für NM überein. Die Matrixprodukte haben daher dieselben Eigenwerte. Einem Eigenvektor x von MN entspricht dabei der Eigenvektor Nx von NM.

2 Im folgenden werden wir zusätzlich voraussetzen: $\lambda_1 < 1$, was sicherlich gerechtfertigt ist, da λ_1 die Größenordnung einer Wachstumsrate hat.

Um die Partikulärlösung des inhomogenen Systems (5.5) zu bestimmen, setzen wir

$$(5.1o) \quad \bar{p}(t) = (1+w)^t \, \bar{p}(o)$$

(neben (5.6) und (5.7)) in (5.5) ein und erhalten:

$$(5.11) \quad \bar{p}(o) = 1(o)a_o \, (E-A-(r-w)B)^{-1}.$$

Über die Existenz einer nichtnegativen Partikulärlösung gibt der folgende Satz Auskunft:

Satz 5.1: (i) Es gibt eine (von A und B abhängige) Zahl $\bar{d} < o$, so daß gilt: Für $\bar{d} < r-w < \lambda_1$ existiert $(E-A-(r-w)B)^{-1}$ und ist positiv. Unter der angegebenen Bedingung stellt (5.1o/11) also für beliebiges $a_o \geq o$ und $1(o) > o$ eine positive Partikulärlösung dar.

(ii) Für $r-w \geq \lambda_1$ existiert keine nichtnegative Lösung von Modell 5.1.

Beweis: Für $r-w \geq o$ ergibt sich die Behauptung wie in Satz 1.2 und 1.3. Darüber hinaus ist für (i) noch zu zeigen, daß auch für dem Betrage nach hinreichend kleine Werte $d = r-w < o$ die Inverse $(E-A-dB)^{-1}$ existiert und positiv ist. Das folgt aber daraus, daß die Inverse für $d = o$ existiert und alle Koeffizienten der Inversen - solange diese existiert - stetig mit d variieren. //

Die allgemeine Lösung von Modell 5.1 ergibt sich als Summe von (5.9) und (5.1o):

$$(5.12) \quad p(t) = (1+w)^t \, \bar{p}(o) + \sum_1 \gamma_1 (1+r-\lambda_1)^t a_1.$$

Da nach dem Theorem von Frobenius von den Eigenvektoren q_i nur q_1 aus ausschließlich nichtnegativen Komponenten besteht,[1] enthalten bis auf die ersten beiden alle Summanden von (5.12) auch negative Komponenten. Für das folgende wollen wir den - gewissermaßen nur zufällig möglichen - Fall, daß für ein i $1+r-\lambda_i$ gerade betragsgleich mit $1+w$ ist, ausschließen. Dann gilt:

Satz 5.2:[2,3] Jede nichtnegative Lösung von Modell 5.1 konvergiert relativ gegen die Partikulärlösung (5.1o/11).

Beweis: Da nur die ersten beiden Summanden von (5.12) eine positive Struktur haben, ist nur zu zeigen, daß der Einfluß der Partikulärlösung für große t den von $1+r-\lambda_1$ ausgehenden Einfluß überwiegt. Das folgt aber daraus, daß, wenn überhaupt eine nichtnegative Lösung existiert, nach Satz 5.1 $r-w < \lambda_1$, also $1+w > 1+r-\lambda_1$ gilt. //

Ein entsprechender Satz für das Mengenmodell 1 gilt nicht, da dort wegen $1+w < 1+\lambda_1$ der von dem Eigenwert $1+\lambda_1$ des homogenen Systems ausgehende Einfluß größer als der der Partikulärlösung ist, so daß im Modell 1 zwei Typen von nichtnegativen Lösungen existieren.

Diskussion der Lösung von Modell 5.1: Mit den bisher abgeleiteten Ergebnissen lassen sich folgende Aussagen über die für Modell 5.1 existierenden nichtnegativen

---

1 Vgl. Satz 1.1, der entsprechend auch für Linkseigenvektoren gilt.

2 Mit Satz 5.2 wird nichts über die globale Stabilität von Modell 5.1 ausgesagt.

3 Falls doch für ein i $|1+r-\lambda_i| = 1+w$ wäre, wären unter den nichtnegativen Lösungen auch Schwingungen mit dem Faktor $(1+w)^t$ zunehmender Amplitude um die Partikulärlösung möglich.

Lösungen machen, wobei wir uns nach Satz 5.2 im wesentlichen auf die Diskussion der Partikulärlösung beschränken können, die wir im folgenden als die Gleichgewichtslösung von Modell 1 bezeichnen wollen.

1. Für konstanten Lohnsatz, also w = o, stimmt die obere Grenze eines mit Modell 5.1 verträglichen Zinssatzes mit der oberen Grenze für die im entsprechenden Mengenmodell 1 mögliche Wachstumsrate überein. Das entspricht der Übereinstimmung von Wachstumsrate und Zinsatz im v. Neumannschen Wachstumsmodell[1], obschon hier - wegen der Unabhängigkeit von Mengen- und Preismodell - die Wachstumsrate des Mengenmodells nicht mit dem Zinssatz übereinzustimmen braucht (vgl. dazu auch Satz 5.4 am Ende von Paragraph 2).

2. Die in Satz 5.1 angegebene Bedingung für die Existenz einer nichtnegativen Lösung beinhaltet keine absoluten Schranken für r und w; so können für r = w Zinsatz und Wachstumsrate des Lohnsatzes beliebig groß sein.

3. l(t) stellt den Nominallohnsatz dar, gemessen in Geldeinheiten pro Arbeitsstunde. Da die Preise der Partikulärlösung im selben Ausmaß wachsen wie der Lohnsatz, ist ein (wie auch immer) durch Preisbereinigung mit konstanten Gewichten gewonnener Reallohnsatz $l^{real}(t)$ im Zeitablauf konstant.

4. Die Höhe des Reallohnsatzes $l^{real}(t)$ hängt nicht von der Höhe des Nominallohnsatzes der Ausgangsperiode ab. Sie hängt dagegen von seiner Wachstumsrate w ab. So ist $\bar{p}(o)$ in (5.11) ceteris paribus umso kleiner, je größer w ist (vgl. Gleichung (1.17)). Bei gegebenem Zinssatz entspricht einer höheren Wachstumsrate des Nominallohnsatzes daher ein höherer Reallohnsatz und umgekehrt.

---

1 Vgl. v. Neumann [31].

5. Der Zinssatz r gibt die Nominalverzinsung an. Da auf dem Gleichgewichtspfad die Preise mit der Rate w steigen, können wir $r^{real} = r-w$ als Realzinssatz bezeichnen. In Satz 5.1 ist mit λ_1 damit eine (absolute) Schranke für den Realzinssatz gegeben. Die Preisstruktur und der Reallohnsatz der Partikulärlösung - und damit die Aufteilung der Wertschöpfung in Lohn- und Zinseinkommen - hängen nach (5.11) nur vom Realzinssatz ab.

6. Satz 5.1 besagt, daß auch ein negativer Realzinssatz möglich ist. Auf eine genaue Bestimmung einer unteren Grenze wurde verzichtet, da diese Frage ökonomisch wenig interessant erscheint.[1]

Stabilität. Betrachten wir zunächst die Situation im Falle eines konstanten Lohnsatzes, also w = o. Die Bedingung für die Existenz einer (dann konstanten) nichtnegativen Partikulärlösung und der Existenz einer nichtnegativen Lösung von Modell 5.1 überhaupt ist dann:

(5.14) $r < \lambda_1$.

Eine solche Lösung ist - wie man der Darstellung (5.12) der allgemeinen Lösung entnimmt - stabil, wenn für alle i=1,...,n gilt

(5.15) $|1+r-\lambda_i| < 1$,

wobei diese Bedingung bei Existenz einer nichtnegativen Lösung, wovon wir im folgenden ausgehen wollen, für i = 1 nach (5.14) stets erfüllt ist. Abbildung 5.1

---

1 Entsprechend könnte man Satz 1.2 um die Aussage erweitern, daß auch für Wachstumsraten der Endnachfrage, die kleiner sind als Null, eine positive Partikulärlösung existiert.

stellt die Bedingung (5.15) in der komplexen Zahlenebene graphisch dar: Genau dann ist (5.15) erfüllt, wenn alle Eigenwerte λ_i innerhalb des größeren rechten Kreises mit dem Mittelpunkt 1+r und dem Radius 1 liegen. (Sie liegen stets außerhalb des kleinen, punktierten Kreises um o mit dem Radius λ_1.) Fordert man die Stabilität auch der Lösung des homogenen Systems (was der Stabilität eines entsprechenden geschlossenen Modells entspricht, vgl. Modell 5.3 und Modell 5.4), so ist (5.15) zu ersetzen durch die schärfere Bedingung

$$(5.16) \quad |1+r-\lambda_i| < 1+r-\lambda_1$$

für i=2,...,n. Das dazu gehörige Stabilitätsgebiet wird in Abbildung 5.1 durch den kleineren rechten

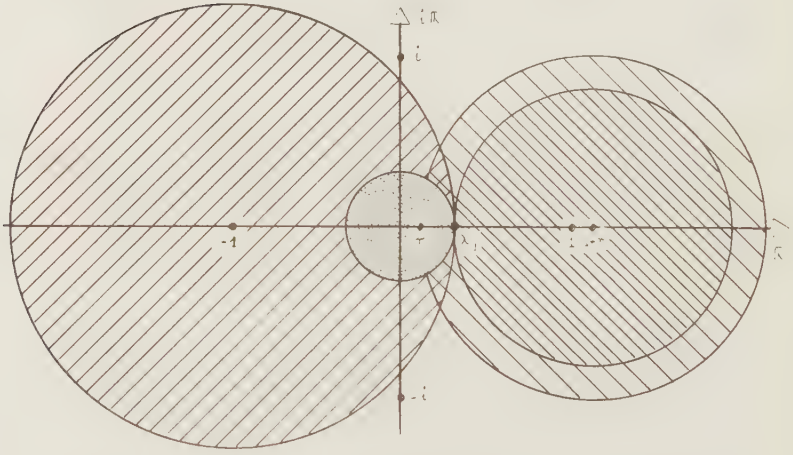

Abbildung 5.1: Stabilitätsgebiete für Modell 5.1 und Modell 1 in der komplexen Zahlenebene

Kreis um 1+r mit dem Radius $1+r-\lambda_1$ wiedergegeben.

Vergleicht man dieses Gebiet mit dem aus Abbildung 1 übernommenen, in Nord-Ost-Richtung schraffierten Stabilitätsgebiet für das entsprechende Mengenmodell[1], so stellt man fest, daß beide Gebiete disjunkt sind. Damit gilt, daß aus der Stabilität des geschlossenen Preismodells stets die vollständige Instabilität des entsprechenden Mengenmodells folgt und umgekehrt, was gelegentlich als duale Instabilität bezeichnet wird.[2] Gemäß Abbildung 5.1 ist dagegen die Stabilität des offenen Preismodells 5.1 mit der des geschlossenen Mengenmodells verträglich - wenn nämlich alle λ_i in einer der beiden kariert schraffiert erscheinenden Schnittflächen von Abbildung 5.1 liegen. Dies stellt allerdings lediglich eine theoretische Möglichkeit dar; die bisherigen empirischen Ergebnisse (vgl. Fußnote 1 auf Seite 2o) sprechen dafür, daß in der Realität beide Modellarten instabile Lösungen haben.

Für $w > o$ ist die Stabilitätsbedingung (5.15) durch

$$(5.17) \quad |1+r-\lambda_i| < 1+w$$

zu ersetzen. Das zugehörige Stabilitätsgebiet (das in Abbildung 5.1 nicht eingezeichnet ist) ist ein Kreis um 1+r mit dem Radius 1+w. Es ist umso größer, je größer r und w sind. Die Stabilitätseigenschaften sind also nicht bereits durch Angabe des Realzinssatzes $r^{real} = r-w$ bestimmt. So ergibt sich für $r^{real}=o$

---

1 Für das Mengenmodell kann es nur Stabilität für das homogene System geben. Vgl. Kapitel 1, § 3.

2 Vgl. Solow [38, S. 37 f] und Jorgenson [11, S. 896], deren Resultate sich von unseren geringfügig unterscheiden, da Solow eine andere Zurechnung der Variablen auf die Perioden zugrunde legt als wir (vgl. die Fußnote auf Seite 1o2)und Jorgenson das Modell in [11] mit stetigen Variablen, also in Differentialgleichungen, formuliert.

und gegen ∞ wachsendes w (=r) die gesamte rechte Halbebene (der komplexen Zahlen mit positivem Realteil) als Stabilitätsgebiet. Theoretisch könnte damit, falls kein λ_i einen negativen Realteil aufweist, ein hinreichend großes Wachstum des Nominallohnsatzes in Verbindung mit einem entsprechend hohen Nominalzinssatz die relative Stabilität der Partikulärlösung garantieren. Empirisch dürfte diese Feststellung jedoch irrelevant sein, da Wachstumsraten des Lohnsatzes, wie sie dazu erforderlich wären, unter normalen Bedingungen unrealistisch sind.[1]

Interpretation von Modell 5.1. Die zeitliche Entwicklung der Preise in Modell 5.1 wird neben der exogen gegebenen Wachstumsrate des Inhomogenitätsterms des Differenzengleichungssystems (5.5) modellendogen durch den homogenen Teil (5.8) bestimmt. Die daraus resultierenden Preisänderungen rühren ausschließlich aus Berücksichtigung der Wertänderungen $\sum_i b_{ij} x_j(t) \Delta p_i(t)$ der Kapitalbestände, die diese bei einer Preisänderung erfahren.

Schematisch läßt sich die Beziehung zwischen den Preisen und den Preisänderungen in folgendem Diagramm darstellen:

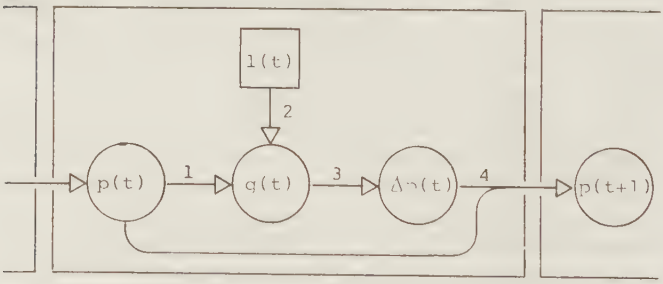

Abbildung 5.2: Schematische Darstellung des "Preismechanismus" in Modell 5.1

1 Der Betrag des betragsgrößten Eigenwertes eines 12 Sektoren-Modells für die Bundesrepublik Deutschland ergibt sich in Meyer und Schumann [26, S. 2o] als 41.79, was einer Wachstumsrate der Größenordnung von über 4ooo % entspricht.

Aus den Werten der Vorperiode resultierende Preise $p(t)$ bestimmen (Pfeil 1) zusammen mit dem exogen gegebenen Lohnsatz $l(t)$ (Pfeil 2) bei gegebenem Zinssatz den Stückgewinnvektor $g(t)$, der sich ohne Berücksichtigung gegebenenfalls eintretender Preisänderungen in Periode t ergeben würde. Soweit dieser Vektor nicht nur aus Nullen besteht, besagt die Nullgewinn-(Gleichgewichts-)Bedingung, daß dann Preisänderungen eintreten müssen (Pfeil 3) in Höhe von $\Delta p(t) = - g(t)B^{-1}$, die gerade dazu führen, daß die durch sie bewirkte Wertänderung der Kapitalbestände diese Gewinne zunichte macht: $\Delta p(t)B = - g(t)$. Ein positiver (negativer) Gewinn $g_j(t)$ in Sektor j bedingt damit Preissenkungen (Preissteigerungen) in den Sektoren, aus deren Gütern der Kapitalbestand des Sektors j besteht. Daraus resultieren dann (Pfeil 4) die Preise der Periode t+1.

Es ist evident, daß der in Abbildung 5.2 dargestellte "Preismechanismus" sich nicht kausal interpretieren läßt. Die Lösungen von Modell 5.1 ließen sich in einem deskriptiven Sinn also nur deuten, wenn man die Existenz von im Modell nicht beschriebenen Kräften unterstellen kann, die Preisbewegungen bewirken, wie sie aus dem Modell resultieren. Es ist nun aber klar, daß das Vorliegen vollständiger Konkurrenz nicht einen Ausgleich der Gewinne in der Weise bewirkt, daß die Kapitalbestände der einzelnen Sektoren umbewertet würden (der Wert des Kapitalbestandes eines Sektors mit Gewinnen (Verlusten) müßte dazu fallen (steigen)), sondern, daß der Ausgleich tendenziell über den Preis der von den Sektoren produzierten und abgesetzten Gütern erfolgt, was einen anderen als den in Abbildung 5.2 dargestellten "Mechanismus" impliziert.

Modell 5.1 ist damit, wie die Gleichgewichts-Mengenmodelle, nur im Sinne einer Bedingungstheorie zu interpretieren als die Beschreibung möglicher gleichgewichtiger Entwicklungen. Seine Bedeutung liegt im Nachweis

der Existenz einer solchen Entwicklung. In Kapitel 6 werden wir zeigen, daß es möglich ist, explikative Modelle anzugeben, die die Partikulärlösung von Modell 5.1 als stabile Lösung beinhalten. Diese Modelle können als (mögliche) Präzisierung der oben erwähnten, in Modell 5.1 nicht beschriebenen Kräfte gelten, die auf eine Realisierung der Gleichgewichtslösung (nicht der anderen Lösungen von Modell 5.1) hin wirken.

§ 2 Berücksichtigung von Gewinnen

Formulierung eines Modells mit Gewinnen. Die bisher von uns angenommene Bedingung von Nullgewinnen entspricht einer strengen Version von Konkurrenz, die jegliche Gewinne zum Verschwinden bringt. Wir wollen im folgenden eine schwächere Version von Konkurrenz zugrunde legen, nach der von Null verschiedene Gewinne in bestimmter Höhe zugelassen sind und der Konkurrenzmechanismus lediglich einen Ausgleich zwischen den Gewinnen der verschiedenen Sektoren bewirkt. Konkret wollen wir von einem für alle Sektoren einheitlichen Gewinnzuschlagsatz $\pi > 0$ auf die (Vorleistungs-, Lohn- und Kapital-)Kosten ausgehen. Im Sinne einer Konkurrenzwirtschaft kann π interpretiert werden als Ausdruck von Mindestansprüchen der Unternehmer, unterhalb derer Unternehmer aus dem jeweiligen Markt ausscheiden und oberhalb derer neue Unternehmer in den jeweiligen Markt eintreten.[1]

Die Gleichgewichtsbedingung, die wir im folgenden zugrunde legen wollen, ist also, daß die Gewinne jeden Sektors genau die Höhe des durch π gegebenen Anteils

---

1 Das im folgenden betrachtete Modell stellt wieder nur die mit einem einheitlichen Gewinnzuschlagsatz konsistenten Preispfade dar, es gibt nicht die als Ergebnis wirksamer Konkurrenz resultierenden Preisentwicklungen wieder.

an den Produktionskosten haben. Das Differenzengleichungssystem für die Gleichgewichtspreise, die diese Bedingung erfüllen, lautet:

$$(5.19)\quad p(t) = (1+\pi)\,(p(t)(A+rB) + l(t)a_o - \Delta p(t)B).$$

Den durch (5.19) zusammen mit (5.7) beschriebenen Zusammenhang wollen wir als Modell 5.2 bezeichnen. Für $\pi = o$ ist Modell 5.1 als Spezialfall darin enthalten.

Lösung des Modells. Bezeichnen wir mit A_π, B_π und $a_{o\pi}$ die Matrizen bzw. den Vektor $(1+\pi)A$, $(1+\pi)B$ und $(1+\pi)a_o$, so läßt sich (5.19) in einer Form schreiben, die genau der von (5.5) entspricht:

$$(5.2o)\quad p(t) = p(t)(A_\pi+rB_\pi) + l(t)a_{o\pi} - \Delta p(t)B_\pi$$

Die Struktur der mit der Rate w wachsenden Partikulärlösung ergibt sich in Analogie zu (5.11) als

$$(5.21)\quad \bar{p}(o) = l(o)a_{o\pi}\,(E-A_\pi-(r-w)B_\pi)^{-1}.$$

Wegen der formalen Ähnlichkeit lassen sich die Ergebnisse für Modell 5.1 auf Modell 5.2 übertragen. Da für A_π jedoch nicht a priori die Bedingung eines maximalen Eigenwertes kleiner als 1 gegeben ist, haben wir dazu noch einmal auf den Beweis von Satz 5.1 einzugehen. Wir werden uns dabei auf den Fall $r^{real} = r-w \geq o$, also auf einen nichtnegativen Realzinssatz beschränken.

Eine nichtnegative Partikulärlösung (5.21) und damit eine nichtnegative Lösung von Modell 5.2 überhaupt existiert genau dann (vgl. Satz 1.2 und Satz 1.3), wenn der maximale Eigenwert ϱ von $A_\pi + r^{real}B_\pi$ kleiner

ist als 1. Diese Bedingung hängt von r^{real} und π ab. Da ϱ unbeschränkt, stetig und monoton mit π und r^{real} steigt, gibt es für gegebenes r^{real} einen Wert $\pi(r^{real})$, für den ϱ den Wert 1 hat und entsprechend für gegebenes π einen Wert $r^{real}(\pi)$, so daß ϱ den Wert 1 annimmt. $\pi(r^{real})$ berechnet sich dabei, wie man leicht sieht, als $1/\varrho(r^{real}) - 1$, wo $\varrho(r^{real})$ der maximale Eigenwert von $A+r^{real}B$ ist, und $r^{real}(\pi)$ als $1/\mu(\pi)$, wo $\mu(\pi)$ der maximale Eigenwert von $(E-A_\pi)^{-1}B_\pi$ ist. Damit können wir über die Existenz einer nichtnegativen Lösung von Modell 5.2 sagen:

Satz 5.3: Eine nichtnegative Lösung von Modell 5.2 existiert zu beliebigem $l(\cdot) > o$, $a_o \geq o$ genau dann, wenn zu gegebenem r^{real} π kleiner ist als $\pi(r^{real})$ bzw. zu gegebenem π r^{real} kleiner ist als $r^{real}(\pi)$. //

Abbildung 5.3 veranschaulicht das Gebiet der zulässigen Werte für r^{real} und π. Genau dann, wenn der Punkt (r^{real}, π) unterhalb der Kurve $\pi = \pi(r^{real})$ liegt, existiert eine nichtnegative Lösung von Modell 5.2. $\pi(o)$ und $r^{real}(o)$ stellen darin absolute Obergrenzen für die möglichen Werte dar.

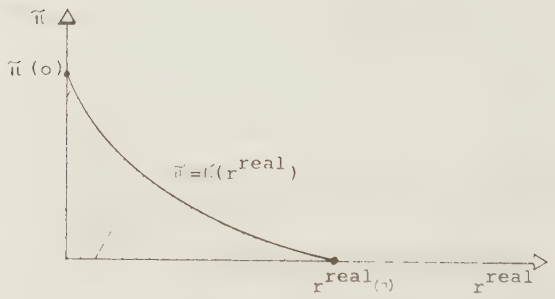

Abbildung 5.3: Zulässige Werte für r^{real} und π im Modell 5.2

Wie in Modell 5.1 ist die Höhe des Lohnsatzes ohne Einfluß auf Existenz und Struktur einer nichtnegativen Lösung, sie beeinflußt lediglich die Höhe des Preisniveaus. Eine größere Wachstumsrate w des Lohnsatzes bewirkt bei Konstanz von r und π eine andere Preisstruktur und einen höheren Reallohnsatz, bei Konstanz von r^{real} und π sind Preisstruktur und Reallohnsatz dagegen unabhängig von w.

Die Bedingung der Existenz einer nichtnegativen Lösung von Modell 5.2 läßt sich auch folgendermaßen formulieren (vgl. Satz A.5, (II) $\Leftrightarrow$ (IV)):

> Genau dann existiert eine nichtnegative Lösung von Modell 5.2, wenn es ein Preissystem gibt, das neben der Befriedigung der Ansprüche der Zins- und Gewinneinkommensbezieher, wie sie in r^{real} und π zum Ausdruck kommen, noch Raum läßt für eine Entlohnung des Faktors Arbeit.

Die Stabilitätsaussagen für Modell 5.1 gelten entsprechend für Modell 5.2.

Ein Zusammenhang zwischen Mengen- und Preismodellen. Am Ende des Paragraphen 2 von Kapitel 3 haben wir ein Modell mit endogener Endnachfrage angegeben, in dem die induzierte Endnachfrage von der Verteilung der Wertschöpfung auf verschiedene Einkommenskategorien abhängt. In Modell 5.2 ist diese Verteilung auf die Einkommen Lohn, Zins und Gewinn für die Gleichgewichtslösung (5.21) durch die entsprechenden (nominalen) Wertschöpfungskoeffizienten

$$v^L(t) = l(t)a_o,\ v^K(t) = r\bar{p}(t)B \text{ und}$$
$$v^Q(t) = \frac{\pi}{1+\pi}\,\bar{p}(t) \qquad (5.22)$$

gegeben. Für den Fall w > o, in dem Preise und Lohnsatz

der Gleichgewichtslösung mit der Rate w wachsen, ist damit unmittelbar klar, daß für die entsprechenden Endnachfragekoeffizienten c^L, c^K und c^Q die Berücksichtigung ihrer Abhängigkeit von den Preisen erforderlich ist. Geschieht diese Berücksichtigung in der Form einer der beiden Alternativen A oder B, wie sie in Kapitel 3, § 2 beschrieben sind, die die Konstanz der realen Endnachfrage bei einer Steigerung des Preisniveaus bei gleichbleibender Preisstruktur beinhalten, so sind die Matrizen

$$(5.23) \quad c^I(\bar{p}(t))v^I(t),$$

wo I für L,K oder Q steht, für $v^I(t)$ aus (5.22) im Zeitablauf konstant und die Matrix Z von Modell 3.1 kann als

$$(5.24) \quad Z = A + c^L v^L + c^K v^K + c^Q v^Q$$

mit $c^I v^I = c^I(\bar{p}(o))v^I(o)$ für I=L,K,Q angegeben werden. Die Lösungen des entsprechenden Mengenmodells 3.1 sind damit letztlich durch den Realzinssatz r^{real} und den Gewinnzuschlagsatz $\bar{\pi}$ (die $\bar{p}(o)$ determinieren) gegeben.

Unterstellen wir für das Lohneinkommen eine größere Endnachfrageneigung als für Einkommen aus Zins und Gewinn, so wird eine Erhöhung von r^{real} und $\bar{\pi}$ über geringere induzierte Endnachfrage zu einer Erhöhung der gleichgewichtigen Wachstumsrate des Mengenmodells führen. Für einen speziellen Fall erhalten wir das "klassische" Resultat:[1]

---

1 Vgl. dazu die entsprechenden Ergebnisse von Morishima [27, S. 376 f.].

Satz 5.4: Unter der Voraussetzung, daß
- das gesamte Lohneinkommen konsumiert wird,
- das gesamte Zinseinkommen investiert wird ($c^K = o$) und
- die Gleichgewichtspreise bei Nullgewinnen realisiert sind ($\pi = o$),

stimmt die gleichgewichtige Wachstumsrate des Mengenmodells mit dem Realzinssatz überein.

Beweis: Die Gleichgewichtspreise $\bar{p}(o)$ sind gegeben durch die Gleichung

$$(5.25)\quad \bar{p}(o) = \bar{p}(o)(A+r^{real}B) + l(o)a_o.$$

Nun ist $v^L(o) = l(o)a_o$, und die Voraussetzung, daß das gesamte Lohneinkommen konsumiert wird, besagt für Periode o: $\bar{p}(o)c^L(\bar{p}(o)) = 1$. Damit folgt aus (5.25)

$$(5.26)\quad \bar{p}(o) = \bar{p}(o)(A+r^{real}B) + \bar{p}(o)c^L v^L$$

oder

$$(5.27)\quad \bar{p}(o)\, B(E-Z)^{-1} = \frac{1}{r^{real}}\, \bar{p}(o),$$

wo $Z = A+c^L v^L$ ist. $1/r^{real}$ ist also maximaler Eigenwert von $B(E-Z)^{-1}$. Die gleichgewichtige Wachstumsrate λ_1 des Mengenmodells ist aber gerade $1/\mu_1$, wo μ_1 der maximale Eigenwert von $(E-Z)^{-1}B$ ist, mit derselben Matrix Z (vgl. (5.24)); λ_1 stimmt daher mit r^{real} überein. //

§ 3 Endogenisierung des Lohnsatzes

Im offenen Mengenmodell 1 ist jede Wachstumsrate w unterhalb der gleichgewichtigen Wachstumsrate λ_1 des homogenen Systems realisierbar. Großen Wachstumsraten entspricht dabei ein kleiner Anteil der Endnachfrage f an der Produktion x. Durch Endogenisierung der Endnachfrage, das heißt durch die modellmäßige Erfassung eines festen Verhältnisses zwischen Endnachfrage und Produktion in Form von konstanten sektoralen Endnachfragequoten ergibt sich (in Modell 3.1 mit vollständig endogenisierter Endnachfrage) eine einzige mögliche Rate für gleichgewichtiges Wachstum.

Im offenen Preismodell 5.2 ist entsprechend jede Kombination von r^{real} und ε innerhalb der in Abbildung 5.3 schraffiert gezeichneten Fläche möglich. Kombinationen nahe der oberen Grenze entsprechen dabei hohe Preise und damit (unabhängig vom Nominallohnsatz) ein kleiner Reallohnsatz. Ähnlich dem Vorgehen beim Mengenmodell kann man nun den (Nominal-)Lohnsatz durch die Bedingung eines festen, vorgegebenen Reallohnsatzes (analog zu den festen vorgegebenen Endnachfragequoten) endogenisieren.

Formulierung eines Modells mit endogenem Lohnsatz. Ist $c = (c_1,\ldots,c_n)'$ ein (reales) Konsumgüterbündel, zu dessen Erwerb das Lohneinkommen einer Arbeitsstunde befähigen soll, so läßt sich die Bedingung eines konstanten Reallohnsatzes formulieren als

$$(5.28)\quad l(t) = \sum_i p_i(t)c_i = p(t)c,$$

wo l(t) wie bisher den nominalen Lohnsatz in Geldeinheiten pro Arbeitsstunde bezeichnet. (5.28) impliziert nicht, daß die aus dem Lohn einer Arbeitsstunde ge-

tätigte Konsumnachfrage stets gleich c ist (was eine Konsumquote des Lohneinkommens von 1 bedeuten würde), sondern lediglich, daß der "Warenkorb" c zur Preisbereinigung des nominalen Lohnsatzes bei gegebenenfalls eintretenden Preisänderungen Verwendung findet. Setzen wir (5.28) in (5.19) ein, so erhalten wir das Differenzengleichungssystem

$$(5.29)\quad p(t) = (1+\pi)\,(p(t)(Z+rB) - \Delta p(t)B),$$

mit $Z = A+a_o c$. Ein Element $z_{ij} = a_{ij} + c_i a_{oj}$ von Z gibt den Einfluß des Preises p_i auf die Produktionskosten des Sektors j für Vorleistungen und Löhne wieder. Den durch (5.29) beschriebenen Zusammenhang wollen wir als Modell 5.3 bezeichnen.

Lösung des Modells. Bezeichnen wir mit Z_π und B_π die Matrizen $(1+\pi)Z$ und $(1+\pi)B$, so läßt sich (5.29) schreiben als das Differenzengleichungssystem

$$(5.3o)\quad p(t) = p(t)(Z_\pi+rB_\pi) - \Delta p(t)B_\pi,$$

das genau die Struktur des homogenen Teils von Modell 5.1 (und Modell 5.2) hat. Für die Lösung von (5.3o) ist der maximale Eigenwert von Z_π entscheidend. Dazu beweisen wir:

Satz 5.5: Genau dann, wenn die zur Produktion des Güterbündels c notwendige Arbeitszeit a weniger als eine Stunde beträgt, ist der maximale Eigenwert von Z kleiner als 1.

Beweis: Zu gegebenen $c \geqslant o$ ist $x = (E-A)^{-1}c > o$ die zur Befriedigung der Endnachfrage c nötige Bruttoproduktion und $a = a_o x$ der dazu erforderliche Arbeitsinput. Ohne etwas an den Zusammenhängen des Modells zu

ändern, können wir die Mengeneinheiten für die n Güter so umändern, daß gilt $x = (1,1,\ldots,1)'$.[1] In den neuen Einheiten gilt für alle i:

$$(5.31) \quad \sum_j a_{ij} + c_i = 1.$$

Für die Zeilensummen von Z (in den neuen Einheiten) gilt damit

$$(5.32) \quad \sum_j z_{ij} = \sum_j (a_{ij}+c_i a_{oj}) = \sum_j a_{ij} + c_i a_o .$$

Aus (5.31) und (5.32) folgt, daß für $a \lesseqgtr 1$ alle Zeilensummen von $Z \lesseqgtr 1$ sind, und damit nach Satz A.7 (vi), daß der maximale Eigenwert von $Z \lesseqgtr 1$ ist.

Mit Satz 5.5 können wir jetzt zeigen:

Satz 5.6: Genau dann, wenn die zur Produktion des Güterbündels c notwendige Arbeitszeit a weniger als $1/(1+r)$ beträgt, existiert eine für alle t nichtnegative Lösung von Modell 5.3 mit positivem Realzinssatz.

Beweis: Die allgemeine Lösung des Differenzengleichungssystems (5.3o) lautet (entsprechend der allgemeinen Lösung des homogenen Teils von Modell 5.1)

$$(5.33) \quad p(t) = \sum_i \alpha_i (1+r-\lambda_i)^t q_i ,$$

wo λ_i die Eigenwerte von $(E-Z)B^{-1}$ und q_i die zugehörigen Eigenvektoren sind. Eine für alle t nichtnegative Lösung existiert genau dann, wenn ein Eigenwert λ_i mit $1+r-\lambda_i > o$ und nichtnegativem Eigenvektor q_i existiert. Die Preissteigerungsrate w auf dem zu λ_i gehörigen Lösungspfad $\alpha_i(1+r-\lambda_i)^t q_i$ beträgt $r-\lambda_i$; die Bedingung eines positiven Realzinssatzes $r^{real} = r-w = \lambda_i$ ist $\lambda_i > o$.

1 Durch die Wahl von neuen Einheiten ändern sich x, c, a_o und A, nicht dagegen a. Vgl. dazu auch Meyer [25].

Sei zunächst $a < 1/(1+\tilde{\pi})$. Da nach Satz 5.5 der maximale Eigenwert von $Z_{\tilde{\pi}}$ dann kleiner als 1 ist, erfüllt $\lambda_1 = 1/\mu_1$, wo μ_1 der maximale Eigenwert von $B_{\tilde{\pi}}(E-Z_{\tilde{\pi}})^{-1}$ ist, die Bedingung $\lambda_1 > o$, $q_1 > o$. Die Bedingung $1+r-\lambda_1 > o$ wollen wir als gegeben ansehen.[1]

Sei umgekehrt für ein i $\lambda_i > o$ und $q_i \geqslant o$. Dann folgt aus

$$(5.34) \quad q_i (E-Z_{\tilde{\pi}})B_{\tilde{\pi}}^{-1} = \lambda_i q_i:$$

$$(5.35) \quad q_i (E-Z_{\tilde{\pi}}) = \lambda_i q_i B_{\tilde{\pi}} \geqslant o,$$

und damit nach dem Theorem über die Invertierbarkeit von Leontief-Matrizen, daß der maximale Eigenwert von $Z_{\tilde{\pi}}$ kleiner als 1 ist, also mit Satz 5.5 die Behauptung.//

Ist die Bedingung $a < 1/(1+\tilde{\pi})$ erfüllt, so ist q_1 positiv und keiner der übrigen Eigenvektoren q_i von $(E-Z_{\tilde{\pi}})B_{\tilde{\pi}}^{-1}$ ist nichtnegativ. Eine nach Satz 5.6 existierende nichtnegative Lösung ist also positiv und im wesentlichen eindeutig bestimmt als

$$(5.36) \quad p(t) = \alpha_1(1+r-\lambda_1)^t q_1.$$

(5.36) wollen wir wieder als <u>die</u> gleichgewichtige Lösung von Modell 5.3 bezeichnen.

<u>Stabilität</u>: Die Gleichgewichtslösung (5.36) von Modell 5.3 ist relativ stabil genau dann, wenn für alle i=2,...,n gilt

$$(5.37) \quad |1+r-\lambda_i| < 1+r-\lambda_1,$$

was einen Kreis um 1+r mit dem Radius $1+r-\lambda_1$ als Stabilitätsgebiet für die Eigenwerte λ_i bedeutet. Erfüllen einige λ_i diese Bedingung, so sind neben (5.36) noch

1 Vgl. Fußnote 2 auf Seite 105.

weitere nichtnegative Lösungen möglich, die für wachsendes t relativ gegen die Lösung (5.36) konvergieren. Verletzt nur ein λ_i die Bedingung (5.37), so ist die gleichgewichtige Lösung relativ instabil. Jede Lösung (5.33) mit $\alpha_i \neq 0$ für alle i nimmt dann für große t auch negative Werte an, da die Eigenvektoren q_i für i=2,...,n auch negative Komponenten haben. Wieder gilt, daß die theoretische Möglichkeit der Stabilität in der Realität den empirischen Untersuchungen nach nicht gegeben ist.

Diskussion der Gleichgewichtslösung. 1. Die Existenz einer nichtnegativen Lösung mit positivem Realzins wird (bei gegebenen A, B und a_0) durch die Höhe von π und c, also durch Gewinnzuschlag- und Reallohnsatz bestimmt. Der Fall $a > 1/(1+\pi)$ (vgl. Satz 5.5) läßt sich interpretieren als eine Situation, in der die Gewinn- und Lohnansprüche schon größer als die erzielbare Wertschöpfung sind. Soweit dann überhaupt eine nichtnegative Lösung von Modell 5.3 existiert (was in gewissen Grenzen für π und c der Fall ist, worauf wir hier aber nicht eingehen wollen), muß für sie der Realzins negativ sein: Die überhöhten Gewinn- und Lohneinkommen werden durch negative Zinseinkommen möglich.

2. Die Preissteigerungsrate $w = r-\lambda_1$ hängt von π, r und c ab. Es gilt

Satz 5.7: $\frac{\partial w}{\partial \pi} > 0$, $\frac{\partial w}{\partial r} > 0$ und $\frac{\partial w}{\partial c_i} > 0$ für alle i=1,...,n.

Beweis: Für r ist die Behauptung unmittelbar klar. Für π und c folgt sie daraus, daß für wachsendes π und c der maximale Eigenwert u_1 von $B(E-Z)^{-1}$ wächst[1]

1 Vgl. dazu den Beweis von Satz 3.3.

und damit $\lambda_1 = 1/\mu_1$ abnimmt.//

3. Die Preissteigerungsrate w kann kleiner als, gleich oder größer als o sein. Bei gegebenem c ist $w = o$ genau dann, wenn r und π eine der Beziehung $\pi = \pi(r^{real})$ in Abbildung 5.3 entsprechende Bedingung erfüllen.[1] Für Kombinationen von r und π unterhalb der entsprechenden Kurve ist $w < o$, für Kombinationen oberhalb ist $w > o$. Für wachsendes c verschiebt sich die Kurve zum Ursprung (und stimmt mit ihm überein, wenn $a = 1$, vgl. Satz 5.5).

4. Der Fall $w = o$, das heißt $r = \lambda_1$, kann interpretiert werden als eine Situation, in der die durch c, r und π zum Ausdruck kommenden Ansprüche der Lohn-, Zins- und Gewinneinkommensbezieher an das Volkseinkommen in ihrer Summe - bei dem durch q_1 gegebenen Preissystem - gerade der Wertschöpfung entsprechen. Wenn die Ansprüche die mögliche Wertschöpfung übersteigen (bzw. darunter bleiben), resultiert Inflation (bzw. Deflation). Eine Gleichgewichtslösung bei zu großen Ansprüchen an das Volkseinkommen ergibt sich in Modell 5.3 dadurch, daß die Zinsansprüche real nur in der Höhe $r-\lambda_1$ befriedigt werden.

§ 4 Das allgemeine geschlossene Input-Output-Preismodell

Entsprechend der Situation beim Mengenmodell 3.1 mit vollständig endogener Endnachfrage können wir auch hier die Gleichungen

---

1 Die Beziehung lautet hier $\pi = 1/\varrho(r)-1$, wo $\varrho(r)$ der maximale Eigenwert von $Z+rB$ ist.

$$(5.38)\quad p(t) = (1+\tilde{\pi})\,(p(t)(A+rB) + l(t)a_o - \Delta p(t)B)$$

und

$$(5.39)\quad l(t) = p(t)c,$$

die Modell 5.3 beschreiben, zusammenfassen zu einem Differenzengleichungssystem mit n+1 Variablen:

$$(5.4o)\quad \underline{p}(t) = (1+\tilde{\pi})\,(\underline{p}(t)(\underline{A}+r\underline{B}) - \Delta\underline{p}(t)\underline{B})$$

mit

$$(5.41)\quad \underline{p}(t) = \begin{bmatrix} p(t) \\ l(t) \end{bmatrix} \qquad \underline{A} = \begin{bmatrix} A & c/(1+\tilde{r}) \\ a_o & o \end{bmatrix} \quad \text{und}$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} B & o \\ o & o \end{bmatrix}.$$

Fassen wir nun wieder die privaten Haushalte als (n+1)-ten Produktionssektor auf, in dem mit der Endnachfrage als Input die Arbeit als Output "produziert" wird, so gelangen wir zum allgemeinen geschlossenen Input-Output-Preismodell, Modell 5.4, das durch (5.4o) beschrieben wird ohne die in (5.41) durch die Nullen zum Ausdruck gebrachten Restriktionen. Modell 5.4 berücksichtigt damit auch eine Verzinsung der für die Hervorbringung der Arbeit notwendigen Kapitalgüter und der Bereitstellungskosten des Produktionsfaktors Arbeit (vgl. Kapitel 3, § 3 und die Fußnote auf S. 1o4).

Interpretiert man in Modell 5.4 die letzte Spalte von $\underline{A}$ als die tatsächlich konsumierten Mengen pro geleisteter Einheit Arbeit (und die letzte Spalte von $\underline{B}$ entsprechend), so entsteht im Sektor der privaten Haushalte genau wie in allen übrigen Sektoren ein Gewinn in der Höhe eines dem Gewinnzuschlagsatz $\tilde{\pi}$ entsprechenden Anteils der Kosten. Setzt man die letzte

Spalte von $\underline{A}$ dagegen um den Faktor $1/(1+\pi)$ kleiner an - vgl. (5.41) - (und verfährt mit der letzten Spalte von $\underline{B}$ entsprechend), so wird mit Modell 5.4 die Situation beschrieben, daß in den Sektoren $1,\ldots,n$ Gewinne entstehen, im Sektor der privaten Haushalte dagegen nicht.

Andererseits kann man als letzte Spalte von $\underline{A}$ anstelle von $\underline{c}$ oder $\underline{c}/(1+\pi)$, wo $\underline{c}$ der tatsächliche Konsum pro Arbeitsstunde ist, auch einen Vektor $\underline{c}^o$ oder $\underline{c}^o/(1+\pi)$ ansetzen, der im Sinne der Gleichung (5.28) einen Warenkorb darstellt, zu dessen Erwerb der Lohn einer Arbeitsstunde befähigen soll. $\underline{c}^o \geqslant \underline{c}$ wäre dann etwa zu interpretieren als die Tatsache, daß die (auch durchgesetzten) Lohnforderungen der Arbeitnehmer über den Subsistenzlohn hinausgehen.

Für die Lösung von Modell 5.4 gelten die Aussagen für Modell 5.3 entsprechend: Für nicht zu große Werte von π und $\underline{c}$ (letzte Spalte von $\underline{A}$) existiert eine positive Lösung mit positivem Realzinssatz (vgl. Satz 5.6), die dann im wesentlichen eindeutig bestimmt ist als Gleichgewichtslösung

$$(5.41)\quad \underline{p}(t) = \alpha_1(1+r-\lambda_1)^t\underline{q}_1,$$

wo λ_1 der dem Betrage nach kleinste Eigenwert von $(E-\underline{A})^{-1}\underline{B}$ und $\underline{q}_1$ der zugehörige Eigenvektor ist. Die Preissteigerungsrate $r-\lambda_1$ kann kleiner als, gleich oder größer als 1 sein, sie ist positiv korrelliert mit r, π und $\underline{c}$ (vgl. Satz 5.7).

Teil 2: DYNAMISCHE UNGLEICHGEWICHTSTHEORIE

In Teil 1 haben wir für verschiedene Modelle die Entwicklungen der jeweils endogenen Variablen beschrieben, für die eine gewisse Gleichgewichtsbedingung - volle Kapazitätsauslastung in den Mengenmodellen und eine einheitliche vorgegebene Gewinnrate in den Preismodellen - in jeder Periode erfüllt ist. Im wesentlichen besitzt jedes der betrachteten Modelle genau eine[1] solche Entwicklung, die wir jeweils als den Gleichgewichtspfad bezeichnet haben, die auch ökonomisch zulässig, das heißt nichtnegativ für alle t ist.

Ob oder unter welchen Voraussetzungen in der Realität eine Tendenz zu diesen Entwicklungen hin besteht oder nicht, läßt sich im Rahmen der dargestellten Modelle nicht entscheiden, da diese keine Interpretation als deskriptive Modelle gestatten.[2] Der Grund hierfür liegt darin, daß Mengen- wie Preisänderungen für die Gleichgewichtsmodelle in Teil 1 residual, aus dem Saldo einer die jeweilige Gleichgewichtsbedingung darstellenden Bilanzgleichung resultieren. Ein deskriptives Modell hat dagegen so konzipiert zu sein, daß es die Entwicklung der endogenen Größen beschreibt, wie sie sich in der jeweiligen Situation aus dem Verhalten der Wirtschaftssubjekte ergibt. Für ein Mengenmodell bedeutet das, daß man anstelle des Kriteriums

---

1 Bis auf die offenen Mengenmodelle. Für Modell 1 sind die Lösungen vom zweiten Typ aber aus einem anderen Grund ökonomisch unplausibel (vgl. Kapitel 1, § 3, S. 16).

2 Vgl. für Modell 2.1 aber die in Kapitel 2, § 3 gegebene Interpretation (S. 42) und die Bemerkung über Modell 2.1 in Kapitel 4, § 2 (S. 94).

"Aufteilung der für Investitionen verfügbaren Mengen ohne Rest" eine Hypothese über das tatsächliche Verhalten in das Modell einzubeziehen hat; für ein Preismodell hat man entsprechend eine Hypothese über das tatsächliche Zustandekommen der Preise (oder Preisänderungen) im Modell zu berücksichtigen.

Genau das soll in den folgenden beiden Kapiteln versucht werden. Die betrachteten Modelle entsprechen dabei genau den in Teil 1 dargestellten - bis auf die Tatsache, daß die zeitliche Entwicklung der endogenen Variablen nicht durch eine Gleichgewichtsbedingung bestimmt ist, sondern sich aus einer Verhaltensgleichung ergibt. Die daraus resultierenden Lösungen sind - soweit sie von den Lösungen in Teil 1 abweichen - notwendigerweise ungleichgewichtig insofern, als sie die jeweilige in Teil 1 zugrunde gelegte Gleichgewichtsbedingung nicht erfüllen. In diesem Sinne beschäftigt sich Teil 2 mit Situationen eines dynamischen Ungleichgewichts.

Es wird sich ergeben, daß die dargestellten Modelle den Gleichgewichtspfad eines jeweils zugehörigen Modells aus Teil 1 als Lösung besitzen, die unter bestimmten Bedingungen stabil ist. Dabei beinhaltet jetzt, in einem explikativen Modell, die mathematische Stabilität (Konvergenz aller Lösungen gegen eine bestimmte Lösung) gleichzeitig ökonomisch die Tendenz hin zum Gleichgewichtspfad.

Kapitel 6 Ungleichgewichtige Input-Output-Preismodelle

§ 1 Modelle mit exogenem Lohn-, Zins- und Gewinnzuschlagsatz

Formulierung eines Modells mit konstantem Lohnsatz. Wir wollen zunächst die Situation des offenen Modells 5.2 mit einem konstanten Lohnsatz $l(t) = l$ untersuchen. Da wir nicht a priori eine gleichgewichtige Entwicklung zugrunde legen, haben wir zwischen geplanten und realisierten Größen zu unterscheiden. Wir werden dabei annehmen, daß Lohn- und Zinssatz stets in der geplanten (exogen gegebenen) Höhe l bzw. r auch realisiert werden. Bezüglich des Gewinnzuschlags gehen wir davon aus, daß die aufgrund des (exogen gegebenen) geplanten Gewinnzuschlagsatzes π geplanten Preise realisiert werden, woraus sich der realisierte Gewinnzuschlag residual ergibt.

Bei einem für die Periode t gegebenem Preissystem p(t) ergeben sich die Stückgewinne (ohne Berücksichtigung von gegebenenfalls eintretenden Wertänderungen des Kapitalbestandes) in Sektor j als

$$(6.1)\quad s_j(t) = p_j(t) - \sum_i a_{ij}p_i(t) - la_{oj} - r\sum_i b_{ij}p_i(t).$$

Der Gewinnanteil an den Erlösen: $g_j(t) = s_j(t)/p_j(t)$ ist bei beliebig gegebenen Preisen im allgemeinen für die einzelnen Sektoren j unterschiedlich; genau für das Gleichgewichtspreissystem von Modell 5.2 (mit $w = o$) wäre er für alle Sektoren gleich dem einheitlichen Wert $g = \pi/(1+\pi)$.

Während in Modell 5.2 bei von g abweichenden Werten g_j durch die Gleichgewichtsbedingung jetzt Preisbewegungen "ausgelöst" werden, die über eine Umbewertung

der Kapitalbestände eine Gleichheit der Gewinnanteile bewirken (vgl. die Diskussion im Zusammenhang mit Abbildung 5.2), wollen wir jetzt unterstellen, daß in Sektoren j, in denen g_j über (unter) g liegt, für den Preis p_j die Tendenz besteht zu fallen (steigen). Diese Tendenz kann als Folge eines Konkurrenzmechanismus angesehen werden, der bewirkt, daß in Sektoren mit über g hinausgehenden Gewinnanteilen am Erlös neue Anbieter in den Markt drängen und damit ein höheres Angebot den Preis senkt und entsprechend in Sektoren mit unbefriedigenden Gewinnen Anbieter aus dem Markt ausscheiden und das dadurch knapper werdende Angebot die Preise steigen läßt.

Das Ausmaß der resultierenden Preisänderungen werde durch

$$(6.2) \quad p(t+1) = (1+\pi)\,(p(t)A+la_o+rp(t)B)$$

wiedergegeben. Wir gehen also davon aus, daß die Preise für die Periode t+1 so gesetzt werden, daß sich in Periode t+1 ein einheitlicher Gewinnanteil an den Erlösen für alle Sektoren ergeben würde, wenn weiterhin die Preise der Periode t Geltung hätten. Interpretieren wir p(t) als die von den Unternehmern für die Periode t+1 erwarteten Preise, so sind die Preise p(t+1) diejenigen Preise, die aus einem geplanten Gewinnzuschlagsatz von π resultieren.[1]

---

1 Die Annahme eines einheitlichen Gewinnzuschlagsatzes dient nur der Vereinfachung; die Aussagen des folgenden lassen sich auch für sektoral unterschiedliche Zuschlagsätze π_i, die etwa unterschiedliche Unternehmerrisiken in den einzelnen Sektoren zum Ausdruck bringen, formulieren.

Den mit (6.2) beschriebenen Zusammenhang wollen wir als Modell 6.1 bezeichnen.[1] Ergeben sich nach (6.2) Änderungen des Wertes der Kapitalbestände der einzelnen Sektoren, so bleiben diese ohne "direkten" Einfluß auf die Preisgestaltung. Wir unterstellen also, daß die Unternehmer bei Preissteigerungen aus einer Umbewertung der Kapitalbestände resultierende Gewinne als Scheingewinne ansehen und nicht bei der Festsetzung des Gewinnzuschlags berücksichtigen. Bei Preissteigerungen sich ergebende höhere Reinvestitionskosten und höhere (Nominal-)Verzinsung gehen dagen mit einem Lag von einer Periode in Gleichung (6.2) ein.

Lösung von Modell 6.1. Für das Differenzengleichungssystem (6.2) entfällt die Frage nach der Existenz von nichtnegativen Lösungen, da offenbar zu jedem Anfangswert $p(o) \geqq o$ alle sich ergebenden Preise nichtnegativ sind. Wir wollen die Lösungen daraufhin untersuchen, unter welchen Bedingungen für l, r, $\tilde{\pi}$ und $p(o)$ konstante, fallende oder steigende Preise resultieren.

Die allgemeine Lösung von (6.2) ist die Summe aus der Partikulärlösung

$$(6.3) \quad \bar{p}(t) = \bar{p} = l a_{o\tilde{\pi}} (E - A_{\tilde{\pi}} - r B_{\tilde{\pi}})^{-1}$$

und der allgemeinen Lösung des zugehörigen homogenen Differenzengleichungssystems

---

1 Ähnliche Ansätze werden im Zusammenhang mit dem statischen Input-Output-Modell von Goodwin [7] und Ferguson [5] zur Analyse der Inflation verwandt. Morishima gelangt bei einer Interpretation von (6.2) mit $\tilde{\pi} = o$ als Kostenpreisen für eine Produktionsdauer von einer Periode zu Satz 6.1 (Seite 133) entsprechenden Ergebnissen für ein verallgemeinertes (alternative Produktionstechniken in jedem Sektor) dynamisches Input-Output-Modell [28, S. 63o].

(6.4) $p(t+1) = p(t)\,(A_{\tilde{\pi}}+rB_{\tilde{\pi}})$,

wo wieder $a_{o\tilde{\pi}}$, $A_{\tilde{\pi}}$ und $B_{\tilde{\pi}}$ $(1+\tilde{\pi})a_o$, $(1+\tilde{\pi})A$ bzw. $(1+\tilde{\pi})B$ bedeuten. Mit $\varrho_1,\ldots,\varrho_n$ und $q_1,\ldots,q_n$ seien die Eigenwerte bzw. (Links-)Eigenvektoren von $A_{\tilde{\pi}}+rB_{\tilde{\pi}}$ bezeichnet. Nach dem Theorem von Frobenius existiert wegen der Nichtnegativität von $A_{\tilde{\pi}}+rB_{\tilde{\pi}}$ darunter ein reeller, positiver Eigenwert, den wir mit $\varrho = \varrho_1$ bezeichnen wollen, für den $\varrho \geq |\varrho_i|$ für alle $i=2,\ldots,n$ gilt und dessen Eigenvektor $q = q_1$ nichtnegativ ist. Im folgenden setzen wir weiterhin die Irreduzibilität von A voraus; q ist dann positiv und der einzige Eigenvektor, der nichtnegativ ist. Zusätzlich machen wir im folgenden die wohl plausible Voraussetzung, daß A azyklisch ist (vgl. die Fußnote auf Seite 18o im Anhang), aus der nach Satz A.6,3. folgt, daß der maximale Eigenwert ϱ dem Betrage nach echt größer ist als alle anderen Eigenwerte.[1]

Damit können wir folgende Aussagen über Modell 6.1 machen:

Satz 6.1: Für $\varrho < 1$ gilt:

(i) Die Partikulärlösung (6.3) existiert und $\bar{p}$ ist für beliebiges $1 > o$, $a_o \geq o$ positiv.

(ii) Unabhängig von den Anfangswerten konvergiert jede Lösung von (6.2) gegen $\bar{p}$. Die Partikulärlösung ist also (absolut) stabil.

---

1 In Teil 1 war diese Voraussetzung nicht erforderlich, da die Matrix $(E-A)^{-1}B$, auf die das Frobenius-Theorem angewandt wurde, für irreduzibles A positiv ist. - Die Invertierbarkeit von B ist in Teil 2 dagegen nicht erforderlich; man vergegenwärtige sich dazu, daß sie in Teil 1 nur dazu erforderlich war, um überhaupt ein und ein eindeutiges Ergebnis bei der "Aufteilung ohne Rest" zu garantieren bzw. zu ermöglichen, daß die Kapitalbestände in geeigneter Weise durch Preisänderungen umbewertet werden können - beides "Mechanismen", die in Teil 2 nicht vorkommen.

(iii) Der Reallohnsatz l^{real}[1] der Partikulärlösung ist konstant und unabhängig von der Höhe des Nominallohnsatzes l durch r und $\bar{\pi}$ bestimmt. Der realisierte Gewinnzuschlagsatz π^r stimmt für die Partikulärlösung mit dem angestrebten Gewinnzuschlagsatz $\bar{\pi}$ überein.

Beweis: (i) folgt wie früher (vgl. Satz 1.2) aus dem Theorem über die Invertierbarkeit von Leontief-Matrizen. Die übrigen Aussagen sind unmittelbar klar.//

Satz 6.2: Für $\varrho \geq 1$ gilt:

(i) Es existiert keine nichtnegative konstante Partikulärlösung.

(ii) Jede Lösung von Modell 6.1 mit $p(o) \geqq o$ konvergiert relativ gegen einen positiven Pfad der Form

(6.5) $$p(t) = \varrho^t q.$$

(iii) Der Reallohnsatz jeder Lösung von (6.2) konvergiert gegen o. Der realisierte Gewinnzuschlagsatz konvergiert für jede nichtnegative Lösung gegen einen für alle Sektoren einheitlichen Wert $\pi^r < \bar{\pi}$.

Beweis: (i) folgt wie im Beweis von Satz 1.2.
(ii) Da ϱ der dem Betrage nach größte Eigenwert ist, ist für (ii) nur zu zeigen, daß für jede Lösung p(t) mit $p(o) \geqq o$ in der Darstellung

---

1 Unter dem Reallohnsatz l^{real} wollen wir - wie in Kapitel 5 - den mit einem Preisindex P mit konstanten Gewichten preisbereinigten Nominallohnsatz verstehen: $l^{real} = l/P$.

$$(6.6)\quad p(t) = \bar{p} + \sum_i \alpha_i \varrho_i^t q_i$$

der Koeffizient α_1 größer als Null ist. Wäre er es aber nicht, so müßte $p(t)$ für große t im Widerspruch zu unserer obigen Feststellung über die Nichtnegativität der Lösungen negative Komponenten aufweisen, da sowohl $\bar{p}$ als auch alle q_i $i=2,\ldots,n$ negative Komponenten haben.[1]

(iii) Die Aussage über den Reallohnsatz ist bei konstantem Nominallohnsatz und nach (ii) (asymptotisch) exponentiell steigenden Preisen klar. Den Grenzwert π^r berechnen wir als auf dem Preispfad (6.5) realisierten Gewinnzuschlagsatz. Wenn $k(t) = p(t)(A+rB)$ den Stückkostenvektor der Periode t bezeichnet (die relativ gegen Null konvergierenden Lohnkosten können wir zur Ermittlung eines Grenzwertes vernachlässigen), so gilt auf dem Pfad (6.5) für jeden Sektor j:

$$(6.7)\quad p_j(t) = (1+\pi)k_j(t-1)$$
$$k_j(t) = \varrho\, k_j(t-1),$$

woraus folgt:

$$(6.8)\quad \pi_j^r = \frac{p_j(t)-k_j(t)}{k_j(t)} = \frac{1+\pi}{\varrho} - 1 = \pi^r < \pi .$$

Nur der Vollständigkeit halber wollen wir noch den Fall eines maximalen Eigenwertes ϱ von genau 1 betrachten, den wir in der nachfolgenden Diskussion der Einfachheit halber ausschließen wollen.

---

1 In (6.6) unterstellen wir die Existenz einer konstanten Partikulärlösung, die nach Teil (i) dann nicht nichtnegativ sein kann. Im Falle, daß ein Eigenwert ϱ_i, $i=2,\ldots,n$ gerade 1 ist, in welchem eventuell keine konstante Partikulärlösung existiert, hat man den Beweis mit der in Satz 6.3 (i) angegebenen speziellen Lösung $\bar{p}(t)$ zu führen. Vgl. dazu auch den Beweis von Satz 1.3.

Satz 6.3: Für $\varsigma = 1$ gilt:

(i) (6.2) besitzt eine nichtnegative Lösung der Form

(6.9) $$\bar{p}(t) = \bar{\bar{p}} + t\bar{\bar{p}}.$$

(ii) Jede Lösung von (6.2) konvergiert relativ gegen eine Lösung der Form (6.9); (6.9) ist also relativ stabil.

(iii) Der Reallohnsatz jeder Lösung von (6.2) konvergiert gegen Null. Der realisierte Gewinnzuschlagsatz konvergiert für jeden Sektor gegen π.[1]

Beweis: Die Lösung (6.9) leitet man wie im Beweis von Satz 1.3 ab. $\bar{\bar{p}}$ ergibt sich dabei als αq mit $\alpha > o$. (ii) und (iii) folgen dann aus der Betrachtung der allgemeinen Lösung von (6.2). //

Diskussion der Lösung. Mit den vorstehenden Sätzen lassen sich folgende Aussagen über Modell 6.1 machen:

1. Im Falle der Existenz einer Lösung mit konstanten Preisen stimmt diese mit der Gleichgewichtslösung von Modell 5.2 (für einen konstanten Lohnsatz, also $w = o$) überein (vgl. Gleichung (5.21)). Anders als in Modell 5.2 ist diese Lösung in Modell 6.1 aber stabil, das heißt unabhängig von den Ausgangspreisen $p(o)$ führt das in Modell 6.1 beschriebene Verhalten (asymptotisch) zur Realisierung der Gleichgewichtslösung.

2. Die Existenz einer Lösung mit konstanten Preisen hängt nur vom Zinsatz r und dem angestrebten Gewinnzuschlagsatz π ab, nicht dagegen vom (Nominal-)Lohnsatz l.

---

1 Für den zufällig möglichen Fall, daß im zufällig möglichen Fall $\varsigma = 1$ der Vektor a_o Eigenvektor von A+rB ist (was $\bar{\bar{p}} = o$ in (6.9) bedeutet) sind (ii) und (iii) geringfügig zu modifizieren.

Der Reallohnsatz ist dabei um so kleiner, je größer die in r und $\bar{\pi}$ zum Ausdruck kommenden Ansprüche der Zins- und Gewinneinkommensbezieher an das Volkseinkommen sind.

3. Anders als Modell 5.2, das für den Fall $\varsigma > 1$ nur die Aussage gestattet, daß keine nichtnegative Gleichgewichtslösung existiert, beschreibt Modell 6.1 auch in diesem Fall eine nichtnegative Lösung, die in einem ständigen Steigen der Preise besteht. Für diesen Fall ist die resultierende Lösung allerdings auf lange Sicht ökonomisch unplausibel, da der Anteil der Löhne an der Wertschöpfung gegen Null konvergiert. Es ist vielmehr anzunehmen, daß in einer solchen Situation zum einen der Nominallohnsatz die Tendenz haben wird, zu steigen, und daß zum anderen die dauernde Ungleichung $\pi^r < \bar{\pi}$ die Unternehmer veranlassen wird, ihr auf einem angestrebten Gewinnzuschlagsatz von $\bar{\pi}$ basierendes Preissetzungsverhalten zu ändern.

Einbeziehung eines (exogen) wachsenden Lohnsatzes. In Modell 6.1 resultiert Inflation nur im Fall $\varsigma > 1$, der aber unplausibel ist, da er (vgl. Kapitel 5, § 2, Seite 117) gleichbedeutend damit ist, daß die in r und $\bar{\pi}$ zum Ausdruck kommenden Ansprüche der Zins- und Gewinneinkommensbezieher bereits größer sind als die gesamte Wertschöpfung, so daß sie nur bei negativen Lohnzahlungen befriedigt werden könnten. Diesen Fall wollen wir für das folgende ausschließen.[1] Um einen Einfluß der Löhne auf die Preisgestaltung zu berücksichtigen, wollen wir jetzt dagegen die Voraussetzung eines konstanten Lohnsatzes 1 aufgeben zugunsten der Annahme eines mit einer konstanten Rate $w \geq 0$ wachsenden Lohnsatzes:

---

1 Obwohl seine Behandlung im Rahmen des im folgenden eingeführten Modells 6.2 genau wie für Modell 6.1 möglich wäre.

$$l(t) = (1+w)^t \, l(o). \tag{6.10}$$

Dieses exogene Wachstum des Nominallohnsatzes[1] können wir wieder interpretieren als das Bestreben der Arbeitnehmer, ihren Anteil am Volkseinkommen zu vergrößern oder als Ausdruck der Erwartung von Preissteigerungen. Da bei einem ständig steigenden Lohnsatz auch die Preise steigen müssen, wäre es nicht sinnvoll, weiterhin die Preisgleichung (6.2) zugrunde zu legen, in der die Preise für die Periode t+1 auf der Grundlage der Kosten der Periode t gebildet werden. Wir wollen stattdessen annehmen, daß in die Preisbildung für die Periode t+1 erwartete Kosten eingehen, und zwar in der Form

$$p(t+1) = (1+\pi)\,(p^e(t+1)A+l^e(t+1)a_o+rp^e(t+1)B), \tag{6.11}$$

wo $p^e(t+1)$ und $l^e(t+1)$ die für die Periode t+1 erwarteten Preise bzw. den erwarteten Lohnsatz darstellen. Für w = o und

$$\begin{aligned} p^e(t+1) &= p(t) \\ l^e(t+1) &= l(t) \end{aligned} \tag{6.12}$$

ist in diesem Ansatz Modell 6.1 enthalten. Demgegenüber wollen wir jetzt annehmen, daß die Unternehmer als zukünftige Entwicklung ein Wachsen der Preise und des Lohnsatzes mit der Rate w^e erwarten:

$$\begin{aligned} p^e(t+1) &= (1+w^e)p(t) \\ l^e(t+1) &= (1+w^e)l(t). \end{aligned} \tag{6.13}$$

---

1 Vgl. dazu auch den nächsten Paragraphen, in dem ein - gegebenenfalls resultierendes - Wachstum der Löhne endogen erklärt wird.

Die erwartete Steigerungsrate w^e kann dabei kleiner als, gleich oder größer als w sein. Den durch (6.1o/11/13) beschriebenen Zusammenhang wollen wir als Modell 6.2 bezeichnen. Er läßt sich zusammenfassen im Differenzengleichungssystem

$$(6.14)\quad p(t+1) = (1+\pi)\,((1+w^e)p(t)A+(1+w^e)(1+w)^t l(o)a_o + r(1+w^e)p(t)B).$$

Lösung des Modells. Die Partikulärlösung von Modell 6.2 ergibt sich als

$$(6.15)\quad \bar{p}(t) = (1+w)^t \bar{p}(o)$$

mit

$$(6.16)\quad \bar{p}(o) = l(o)a_{o\tilde{\pi}}\,(\frac{1+w}{1+w^e}\,E-A_{\tilde{\pi}}-rB_{\tilde{\pi}})^{-1},$$

das zu (6.14) gehörige homogene System lautet:

$$(6.17)\quad p(t+1) = p(t)\,(1+w^e)(A_{\pi}+rB_{\pi}).$$

Damit lassen sich die folgenden beiden, den Sätzen 6.1 und 6.2 entsprechenden und entsprechend zu beweisenden Sätze formulieren:

Satz 6.4: Für $(1+w^e)\varrho < 1+w$ gilt:

(i) Die Partikulärlösung (6.16) existiert und ist positiv. Die Preisstruktur (6.16) und der Reallohnsatz sind unabhängig von der Höhe des Nominallohnsatzes l(o); sie hängen ab vom Verhältnis zwischen der Wachstumsrate des Lohnsatzes und der von den Unternehmern erwarteten Wachstumsrate w^e (genauer: von $(1+w)/(1+w^e)$).

(ii) Die Partikulärlösung ist relativ stabil.

(iii) Der Reallohnsatz der Partikulärlösung ist konstant. Für den auf dem Pfad der Partikulärlösung realisierten Gewinnzuschlagsatz π^r gilt: $\pi^r \lesseqgtr \bar{\pi}$ für $w^e \lesseqgtr w$. //

Satz 6.5: Für $(1+w^e)\varrho > 1+w$ gilt:

(i) Die Partikulärlösung (6.16) enthält negative Komponenten.

(ii) Jede Lösung von (6.14) mit $p(o) \geqslant o$ konvergiert relativ gegen einen positiven Pfad der Form

(6.18) $$p(t) = (\varrho(1+w^e))^t q.$$

(iii) Der Reallohnsatz jeder Lösung von (6.14) konvergiert gegen Null. Der realisierte Gewinnzuschlagsatz konvergiert für jede nichtnegative Lösung gegen einen für alle Sektoren einheitlichen Wert $\pi^r > \bar{\pi}$, der von w^e abhängt mit $\partial\pi^r/\partial w^e > o$. //

Diskussion der Lösung. Die Lösungen von Modell 6.2 entsprechen weitgehend denen von Modell 6.1. Die Unterschiede sind im wesentlichen:

1. Trivialerweise existiert (für $w > o$) keine Lösung mit konstanten Preisen, die Preise wachsen vielmehr mindestens mit der Rate w.

2. Für $w^e \leqslant w$ ist wegen $\varrho < 1$ stets $(1+w^e)\varrho < 1+w$ und damit existiert die Partikulärlösung. Auch für $w^e > w$ ist die Bedingung von Satz 6.4 erfüllt, solange w^e noch kleiner ist als $(1+w)/\varrho - 1$. Erst für hinreichend

große Abweichungen der erwarteten Inflationsrate von dem tatsächlichen Wachstum des Lohnsatzes resultiert (nach Satz 6.5) eine höhere Inflationsrate als w.

3. Im Vergleich mit Modell 5.2 kann r als Realzinssatz interpretiert werden, da die sich bei Preissteigerungen ergebenden Gewinne aus der Wertsteigerung des Kapitals bei den Unternehmen verbleiben.[1] In diesem Sinne stimmt die Partikulärlösung von Modell 6.2 für $w^e = w$ mit der Gleichgewichtslösung von Modell 5.2 überein (vgl. (6.16) mit (5.21)). Anders als in Modell 5.2 ist diese Lösung in Modell 6.2 aber stabil.

4. Für $w^e < w$ ergibt sich nach Satz 6.4 stets eine Inflationsrate w^r (nämlich: $w^r = w$), die größer ist als w^e; für $w^e > w$ ergibt sich nach Satz 6.4 und Satz 6.5 stets eine Inflationsrate w^r (nämlich: $w^r = w$ oder $w^r = \vartheta(1+w^e)-1$) die kleiner ist als w^e. Nehmen wir jetzt an, daß die erwartete Inflationsrate w^e sich im Laufe der Zeit an die tasächlich resultierende Inflationsrate anpaßt, so resultiert langfristig stets $w = w^e$. Die Partikulärlösung für $w = w^e$ (und damit die Gleichgewichtslösung von Modell 5.2 bei einer Interpretation von r gemäß Punkt 3.) stellt damit auch in einem über Modell 6.2 hinausgehenden Sinne eine stabile Lösung dar.

---

1 In Modell 5.2 wurde die Wertsteigerung (bzw. gegebenenfalls Wertverminderung) der Kapitalbestände zu den Gewinnen gerechnet. Um eine vergleichbare Situation für Modell 6.2 zu erhalten, dürfte in die Kapitalkosten nur der Teil der Zinsen, die die Wertsteigerung des Kapitals übertrifft, eingerechnet werden. Das bedeutet aber gerade, r als Realzinssatz zu interpretieren.

§ 2 Endogenisierung des Lohnsatzes

Formulierung eines Modells mit endogenem Lohnsatz. Die sich in Modell 6.2 ergebende Inflationsrate w ist durch das Wachstum des Lohnsatzes exogen vorgegeben. Insofern stellt Modell 6.2 nur die Beschreibung einer Situation mit steigenden Preisen dar, es gibt keine Erklärung für sie. Um das zu erreichen, muß das Wachstum des Lohnsatzes endogen erklärt werden. Wir machen dazu wie in Kapitel 5, § 3 den Ansatz, daß die Arbeitnehmer einen bestimmten Reallohnsatz anstreben, der durch die Anzahl von "Warenkörben" c gegeben ist, die mit dem Nominallohn einer Arbeitsstunde erworben werden können. Der Gütermengenvektor c sei dabei so gewählt, daß der durch ihn repräsentierte angestrebte Reallohnsatz gerade 1 beträgt. Der Nominallohnsatz l, der bei den Preisen p einem Reallohnsatz von 1 entspricht, ist dann $l = pc$.[1]

Sind $p^e(t+1)$ die von den Arbeitnehmern erwarteten Preise für die Periode t+1, so entspricht damit ein Lohnsatz in Höhe von

$$(6.19) \quad l(t+1) = p^e(t+1)c$$

einem erwarteten Reallohnsatz in der angestrebten Höhe von 1. Wir wollen annehmen, daß es den Arbeitnehmern stets möglich ist, Lohnforderungen in einer (6.19) entsprechenden Höhe auch durchzusetzen. Um die Möglichkeit ständig sinkender Preise und eines ständig sinkenden Lohnsatzes auszuschließen, wollen wir (6.19) um die Annahme der Inflexibilität des Nominallohnsatzes nach unten ergänzen und somit

---

1 Wir brauchen dabei wiederum nicht zu unterstellen, daß aus dem Lohn l auch tatsächlich die Endnachfrage c getätigt wird.

(6.2o) $l(t+1) = \text{Max}\{l(t), p^e(t+1)c\}$

als die die in Periode t+1 tatsächlich resultierende Höhe des Lohnsatzes beschreibende Gleichung ansehen.

Für das Preissetzungsverhalten der Unternehmer übernehmen wir die Gleichung (6.11). Von den Preiserwartungen unterstellen wir dabei wieder

(6.21) $p^e(t+1) = (1+w^e)p(t)$,

wobei (6.21) gleichzeitig die Unternehmer- und die Arbeitnehmererwartungen darstellen soll. In Abweichung von Modell 6.2 wollen wir hier - um die Analyse einfach zu halten[1] - annehmen, die Erwartungen der Unternehmer bezüglich des Lohnsatzes der Periode t+1 stimmten mit den Lohnforderungen (6.2o) überein.

Die damit beschriebenen Zusammenhänge wollen wir als Modell 6.3 bezeichnen. Für die Zwecke der Analyse werden wir (6.19) anstelle von (6.2o) verwenden und die Inflexibilität des Lohnsatzes durch nachgeschaltete Überlegungen berücksichtigen. Modell 6.3 (mit (6.19)) wird dann beschrieben durch:

(6.22) $p(t+1) = p(t)\,(1+w^e)(Z_\pi + rB_\pi)$

mit $Z_\pi = A_\pi + ca_{o\pi}$.

---

1 Würden wir die Erwartung $l^e(t+1) = (1+w^e)l(t)$ unterstellen, so hätten wir im folgenden ein Differenzengleichungssystem mit n+1 Variablen (entsprechend dem Ansatz (5.4o/41) zu untersuchen. Die Ergebnisse wären jedoch im wesentlichen dieselben.

Lösung des Modells. Es bezeichne ϱ den maximalen Eigenwert von $Z_{\tilde{\pi}}+rB_{\tilde{\pi}}$ und q den zugehörigen Eigenvektor. Dann lassen sich die Eigenschaften von Modell 6.3 in folgenden Sätzen beschreiben:

Satz 6.6: Für $\varrho(1+w^e) \leq 1$ gilt:

(i) Es gibt eine positive Preisstruktur $\bar{p}$, die eine konstante Lösung von Modell 6.3 darstellt. Für $\varrho(1+w^e) = 1$ gilt dabei $\bar{p} = q$.

(ii) Jede nichtnegative Lösung von Modell 6.3 konvergiert gegen eine Lösung der Form $\alpha\bar{p}$.

Beweis: Wenn der maximale Eigenwert der Matrix des homogenen Differenzengleichungssystems (6.22) $\varrho(1+w^e)$ echt kleiner als 1 ist, wird jede Lösung von Modell 6.3, solange sie durch (6.22) beschrieben wird, über kurz oder lang anfangen, in allen Komponenten kleiner zu werden. Das bedeutet wegen der Inflexibilität des Lohnsatzes nach unten, daß ab irgendeinem t_o gelten muß: $l(t) = l(t_o)$ für alle $t \geq t_o$. Für einen ab t_o konstanten Lohnsatz ist (6.22) aber zu ersetzen durch

$$(6.23)\quad p(t+1) = p(t)\,(1+w^e)(A_{\tilde{\pi}}+rB_{\tilde{\pi}}) + l(t_o)a_{o\tilde{\pi}}$$

$$\text{für } t \geq t_o$$

und jede Lösung von (6.23) konvergiert gegen deren Partikulärlösung

$$(6.24)\quad \bar{p} = l(t_o)a_{o\tilde{\pi}}\,(E/(1+w^e)-A_{\tilde{\pi}}-rB_{\tilde{\pi}})^{-1},$$

die eine stabile Lösung von (6.23) ist.

Für $\varrho(1+w^e) = 1$ konvergiert jede Lösung, solange sie durch (6.22) beschrieben wird, gegen einen Eigenvektor αq oder, wenn sie durch (6.23) beschrieben wird, gegen eine Lösung $\bar{p}$ wie in (6.24). Für diesen zweiten Fall muß nach (6.2o)

$$(6.25) \quad l(t_o) \geqslant (1+w^e)\bar{p}c$$

gelten. Wäre in (6.25) aber das ">"-Zeichen richtig, so würde aus (6.23) folgen

$$(6.26) \quad \bar{p} \geqslant \bar{p}\,(1+w^e)(A_{\pi}+rB_{\pi}) + (1+w^e)\bar{p}ca_{o\pi} =$$

$$\bar{p}\,(1+w^e)(Z_{\pi}+rB_{\pi})$$

und damit nach Satz A.7, (ix): $(1+w^e)\varrho > 1$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Damit muß in (6.25) und (6.26) das Gleichheitszeichen gelten, woraus folgt, daß $\bar{p}$ Eigenvektor von $Z_{\pi}+rB_{\pi}$ ist. //

Satz 6.7: Für $\varrho(1+w^e) > 1$ gilt:

(i) Es gibt keine Lösung von Modell 6.3 mit konstanten Preisen.

(ii) Jede nichtnegative Lösung von Modell 6.3 konvergiert gegen eine Lösung der Form

$$(6.27) \quad p(t) = \alpha((1+w^e)\varrho)^t q.$$

Beweis: (i) Für eine konstante Lösung $\bar{p}$ von (6.23) müßte nach (6.2o) wieder $l(t_o) \geqslant (1+w^e)\bar{p}c$ gelten. Daraus würde wie im Beweis von Satz 6.6 $(1+w^e) \leqslant 1$ im Widerspruch zur Voraussetzung dieses Satzes folgen, womit (i) bewiesen ist. Da jede Lösung für große t durch (6.22) beschrieben wird, ist (ii) klar. //

Diskussion der Lösung. Um Modell 6.3 mit Modell 5.3 vergleichen zu können, bezeichnen wir wie in Kapitel 5, § 3 mit λ_1 wieder den dem Betrage nach kleinsten Eigenwert von $(E-Z_\pi)B_\pi^{-1}$ und mit q_1 den dazugehörigen positiven Eigenvektor. Die Gleichgewichtslösung von Modell 5.3 lautet dann

$$(6.28)\quad p(t) = \alpha_1(1+r-\lambda_1)^t q_1.$$

Es gilt der folgende Satz:

Satz 6.8: (i) $r \gtreqless \lambda_1$ genau dann, wenn $\varrho \gtreqless 1$.

(ii) Für $r = \lambda_1$ (also $\varrho = 1$) gilt: $q = q_1$.

Beweis: $q_1(E-Z_\pi)B_\pi^{-1} = \lambda_1 q_1$ ist gleichbedeutend mit

$$(6.29)\quad q_1(Z_\pi+\lambda_1 B_\pi) = q_1.$$

Damit ist (ii) klar. (i) folgt aus (6.29) mit Satz A.7, (vii). //

Die vorangegangenen Sätze lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

1. Für $\varrho = 1$ und $w^e = o$ strebt jede Lösung von Modell 6.3 gegen einen Gleichgewichtspfad von Modell 5.3. In diesem Sinne sind die Gleichgewichtspfade von Modell 5.3 innerhalb von Modell 6.3 stabil. Ist $w^e > o$, so resultiert in Modell 6.3 ein Wachstum der Preise bei derselben Gleichgewichtsstruktur mit der Rate w^e. Die Inflation ist in diesem Falle ausschließlich auf die Erwartung der Preissteigerungen zurückzuführen.

2. Für $\varphi < 1$ und hinreichend kleines w^e resultieren in Modell 6.3 konstante Preise. Für $w^e > 1/\varphi - 1$ resultiert dagegen Inflation, die ausschließlich auf die Erwartung von Preissteigerungen zurückzuführen ist. Unterstellt man eine Anpassung der Inflationserwartung an die tatsächliche resultierende Inflation, die wegen $\varphi(1+w^e) < 1+w^e$ kleiner ist als w^e, so ergeben sich langfristig wieder konstante Preise. Die Konstanz der Preise für $\varphi < 1$ liegt in der Inflexibilität des Lohnsatzes nach unten begründet. Würde man die Gleichung (6.19) anstelle von (6.2o) verwenden, so ergäben sich für $\varphi < 1$ in Modell 6.3 sinkende Preise wie für die Gleichgewichtslösung von Modell 5.3.

3. Für $\varphi > 1$ ergeben sich in Modell 6.3 auf jeden Fall (da wir die Erwartung sinkender Preise: $w^e < o$ ausgeschlossen haben) Preissteigerungen. Diese rühren für $w^e = o$ allein daraus, daß die in c, r und $\bar{\pi}$ zum Ausdruck kommenden Ansprüche der Lohn-, Zins- und Gewinneinkommensbezieher in ihrer Summe die mögliche Wertschöpfung übersteigen. Unterstellen wir eine Anpassung der Inflationserwartung an die tatsächlich eintretenden Preissteigerungen, die in diesem Fall größer sind als w^e, so ergibt sich eine ständige Steigerung der Inflationsrate.

§ 3 Endogenisierung von Gewinnzuschlagsatz und Zinssatz

In Paragraph 2 gelangten wir zu dem Ergebnis, daß bei überhöhten Lohn-, Zins- und Gewinnansprüchen Inflation resultiert. Besteht die Reaktion der Wirtschaftssubjekte auf die Preissteigerungen in dem Bestreben, ihre weiterhin konstanten Ansprüche durch Einbeziehung der erwarteten Preissteigerungen in ihre Dispositionen dennoch zu befriedigen, so führt das zu immer größer werdenden Inflationsraten. Eine Tendenz zu stabilen Preisen kann nur resultieren, wenn ursprünglich zu hohe Ansprüche als Folge der Tatsache, daß sie nicht befriedigt werden können, nach unten korrigiert werden. Wir wollen in diesem Paragraphen die Folgen einer solchen Anpassung alternativ für die Gewinn- und die Zinsansprüche analysieren.

Formulierung eines Modells mit variablem Gewinnzuschlagsatz. Gehen wir von einer Situation mit nicht zu starken Preisänderungen in der Vergangenheit aus, so können wir von einer Einbeziehung erwarteter Preisänderungen absehen und wie in Modell 6.1 (vgl. Gleichung (6.2)) von einer das Preissetzungsverhalten der Unternehmer beschreibenden Preisgleichung

$$(6.3o)\quad p(t+1) = (1+\pi(t+1))\,(p(t)A+l(t)a_o+rp(t)B)$$

ausgehen. (6.3o) bringt zum Ausdruck, daß die Preise für die Periode t+1 von den Unternehmern auf Grundlage der Kosten in Periode und eines für alle Sektoren gleichen Gewinnzuschlagsatzes $\pi(t+1)$ gebildet werden, den wir jetzt aber als variabel ansehen.

Vom Lohnsatz nehmen wir wie im vorigen Paragraphen an, er sei endogen bestimmt. Dabei wollen wir hier davon ausgehen, er sei durch

$$(6.31) \quad l(t) = p(t)c$$

gegeben, womit wir unterstellen, daß es den Arbeitnehmern gelingt, in jeder Periode einen Reallohnsatz in der Höhe $l^{real}(t) = l(t)/p(t)c = 1$ zu realisieren.[1] Vom Zinssatz nehmen wir weiterhin an, er sei als konstant und nichtnegativ exogen gegeben. (6.3o) läßt sich damit schreiben als

$$(6.32) \quad p(t+1) = (1+\bar{\pi}(t+1))\, p(t)(Z+rB)$$

mit $Z = A+ca_o$.

Für jeden Sektor j ergibt sich bei gegebenen Preisen p(t) in der Periode t der realisierte Gewinnzuschlagsfaktor $1+\bar{\pi}^r_j(t)$ als Quotient von Erlösen und Kosten oder aus

$$(6.33) \quad p_j(t) = (1+\bar{\pi}^r_j(t))\,(\sum_i z_{ij}p_i(t) + r\sum_i b_{ij}p_i(t))$$

als Quotient aus Preis und Stückkosten. Er ist im allgemeinen für die verschiedenen Sektoren unterschiedlich. In (6.3o) haben wir wieder angenommen, daß die

---

1 Diese Annahme dient nur der Vereinfachung. Für den an sich besser mit (6.3o) kompatiblen Ansatz $l(t+1) = p(t)c$ hätte man im folgenden ein Differenzengleichungssystem mit n+1 Variablen (entsprechend dem Ansatz (5.4o/41)) zu untersuchen. Die Ergebnisse wären jedoch im wesentlichen gleich.

Marktkräfte einen Ausgleich zwischen den Gewinnspannen der einzelnen Sektoren bewirken, daß also in Sektoren mit einem relativ hohen in Periode t realisierten Gewinnzuschlagsfaktor für die Periode t+1 nur ein geringerer Faktor in Anschlag gebracht werden kann und umgekehrt. Von dem daraus resultierenden einheitlichen Gewinnzuschlagsfaktor $1+\pi(t+1)$ nehmen wir nun nicht wie im vorangegangenen an, er habe eine exogen gegebene Höhe, sondern unterstellen, daß er sich als Mittel aus den in Periode t realisierten sektoralen Faktoren $1+\pi_j^r(t)$ ergibt. Um die unterschiedliche Bedeutung, die verschieden großen Sektoren zukommt, zu berücksichtigen, gehen wir dabei von einem mit den Produktionsmengen gewichteten Mittel aus, unterstellen also, daß $1+\bar{\pi}(t+1)$ sich als das in Periode t realisierte Verhältnis von gesamtwirtschaftlichen Erlösen zu gesamtwirtschaftlichen Kosten ergibt:

$$(6.34) \quad 1+\bar{\pi}(t+1) = \frac{p(t)x}{p(t)(Z+rB)x} ,$$

wobei wir die als Gewichtung in (6.34) eingehende Struktur der Produktionsmengen x als konstant annehmen wollen.[1] Den durch (6.32/34) beschriebenen Zusammenhang wollen wir als Modell 6.4 bezeichnen.

Lösung des Modells. Setzt man (6.34) in (6.32) ein, so erhält man ein nichtlineares, homogenes Differenzengleichungssystem in den Variablen p(t). Es gilt:

Satz 6.9: Modell 6.4 besetzt eine (bis auf ein Vielfaches) eindeutig bestimmte Lösung mit konstanten, positiven Preisen $\bar{p}$. Sofern der maximale Eigenwert von Z+rB kleiner ist als 1, ist der zu dieser Lösung gehörige (konstante) eindeutig bestimmte Gewinnzuschlagsatz $\bar{\pi}$ positiv.

1 In (6.34) geht offensichtlich nur die Struktur der Produktionsmengen ein, nicht ihre absolute Höhe.

Beweis: Eine konstante Lösung muß die Gleichung

(6.35) $\bar{p} = (1+\bar{\pi})\,\bar{p}(Z+rB)$

erfüllen. Die nichtnegative Matrix Z+rB besitzt aber genau zu ihrem maximalen Eigenwert ϱ einen nichtnegativen Eigenvektor $\bar{p}$, der wegen der Irreduzibilität von Z positiv ist. Aus $\varrho = 1/(1+\bar{\pi})$ folgt die zweite Aussage des Satzes. //

Die Bedingung $\varrho < 1$ besagt, daß die in c und r zum Ausdruck kommenden Ansprüche von Lohn- und Zinseinkommensbeziehern an das Volkseinkommen geringer sind als die Wertschöpfung, so daß also überhaupt noch Raum für Gewinne bleibt. Wir wollen diese Bedingung im folgenden als gegeben ansehen.

Die Lösung (6.35) stimmt überein mit der Gleichgewichtslösung von Modell 5.3 für die Werte c, r und $\bar{\pi}$.[1] Anders als in Modell 5.3 gilt hier jedoch:

Satz 6.10: Jede Lösung von Modell 6.4 mit $p(o) \geqq o$ konvergiert gegen eine Lösung der Form (6.35).

Beweis: Zur Abkürzung sei Z+rB mit M bezeichnet. Setzen wir

(6.36) $p(\tau) = (1+\bar{\pi}(\tau))\,p(\tau-1)M$

für $\tau = t, t-1, \ldots, 1$ sukzessiv in (6.32) ein, so erhalten wir:

---

1 Vgl. dazu Satz 6.8.

$$
\begin{aligned}
p(t+1) &= (1+\bar{\pi}(t+1))p(t)M \\
&= (1+\bar{\pi}(t+1))(1+\bar{\pi}(t))p(t-1)M^2 \\
&= \ldots = \prod_{\tau=1}^{t+1} (1+\bar{\pi}(\tau))\; p(o)M^{t+1}
\end{aligned}
\tag{6.37}
$$

Die Struktur einer Folge $p(t) = p(o)M^t\,\alpha(t)$ konvergiert aber gegen die Struktur des Eigenvektors $\bar{p}$ zum maximalen Eigenwert ϱ von M.[1] Nun gilt aber nach (6.32/34):

$$
p(t+1)x = \frac{p(t)x}{p(t)Mx}p(t)Mx = p(t)x = \ldots = p(o)x, \tag{6.38}
$$

d.h. $p(t)$ konvergiert nicht nur der Struktur nach, sondern absolut gegen denjenigen Eigenvektor $\bar{p}$ zu , der die Gleichung $\bar{p}x = p(o)x$ erfüllt.//

Nach Satz 6.1o führt also die in Modell 6.4 beschriebene Anpassung des Gewinnzuschlagsatzes stets (asymptotisch) zu einer Situation konstanter Preise, wie sie der Gleichgewichtslösung von Modell 5.3 entsprechen.

Formulierung eines Modells mit variablem Zinssatz. Wir wollen jetzt wieder unterstellen, daß die Gewinnansprüche der Unternehmer, also die von ihnen in Ansatz gebrachte Gewinnzuschlagsrate $\bar{\pi}$ konstant ist, und daß anstelle dessen der Zinssatz variabel ist. Die übrigen Zusammenhänge von Modell 6.4 behalten wir bei.

---

1 Falls $p(o)$ einen Anteil von $\bar{p}$ (in der Darstellung der Eigenvektorbasis) besitzt. Das folgt aber aus $p(o) \geqslant o$, da sonst die nichtnegative Folge $p(o)M^t$ in ihrer Struktur gegen die Struktur eines der übrigen Eigenvektoren von M konvergieren müßte, die auch negative Komponenten haben.

Unter "realisierter" Kapitalverzinsung wollen wir diejenige Rate verstehen, die sich ergibt, wenn man die Erlöse abzüglich der Vorleistungs- und Lohnkosten und abzüglich des geplanten Gewinnes ins Verhältnis setzt zum Wert des zur Produktion eingesetzten Kapitals. Sie ergibt sich für einen Sektor j bei Preisen p(t) für die Periode t als

$$(6.39)\quad r_j^r(t) = \frac{p_j(t) - \frac{\bar{\pi}}{1+\bar{\pi}} p_j(t) - \sum_i a_{ij} p_i(t) - l(t) a_{oj}}{\sum_i b_{ij}\, p_i(t)}$$

In (6.39) haben wir den geplanten Gewinn entsprechend einer Gewinnzuschlagsrate von $\bar{\pi}$ mit dem Anteil $\bar{\pi}/(1+\bar{\pi})$ an den Erlösen berücksichtigt. $r_j^r(t)$ ist unabhängig von dem tatsächlich in Periode t geltenden Zinssatz; es gibt vielmehr denjenigen Zinssatz an, der, wenn er in Periode t gegolten hätte, für den Sektor j gerade einen Gewinn in der $\bar{\pi}$ entsprechenden Höhe bewirkt hätte. In Sektoren mit einem höheren realisierten Zinssatz $r_j^r(t)$ als dem in Periode t geltenden werden die Unternehmer (bei Konstanz ihrer Gewinnansprüche) geneigt sein, auch einen höheren Zinssatz zu akzeptieren; in Sektoren mit sehr kleinem realisierten Zinssatz $r_j^r(t)$ werden die Unternehmer dagegen nur einen geringeren Zinssatz akzeptieren.

Wir wollen nun davon ausgehen, daß die hierdurch bewirkte Änderung der Nachfrage nach Krediten auf den sich für die Periode t+1 ergebenden Zinssatz einwirkt.

Um das unterschiedliche Gewicht der verschiedenen Sektoren zu berücksichtigen, gehen wir wieder von einer durchschnittlichen in der Periode t realisierten Kapitalverzinsung aus und unterstellen, daß sich für die Periode t+1 der (einheitliche) Zinssatz r(t+1) ergibt, der der gesamtwirtschaftlich realisierten Verzinsung (wieder nach Abzug der geplanten Ge-

winne) des eingesetzten Kapitals in der Periode t entspricht. Würde für die Periode t+1 ein Zinssatz $r < r(t+1)$ gelten, so wären - jedenfalls bei den Preisen der Periode t - für die Wirtschaft als ganzes größer als $\tilde{\pi}$ entsprechende Gewinne möglich, was eine verstärkte Nachfrage nach Krediten induzieren und damit tendenziell Zins-erhöhend wirken dürfte; entsprechend wären für $r > r(t+1)$ gesamtwirtschaftlich nur kleinere als $\tilde{\pi}$ entsprechende Gewinne möglich, was über geringere Nachfrage nach Krediten tendenziell Zins-senkend wirken würde. $r(t+1)$ ergibt sich als:

$$r(t+1) = \frac{(p(t)-\frac{\tilde{\pi}}{1+\tilde{\pi}}p(t)-p(t)A-l(t)a_o)x}{pBx} \qquad (6.4o)$$

$$= \frac{p(t)(E-Z_{\tilde{\pi}})x}{p(t)B_{\tilde{\pi}}x} \quad ,$$

wo $Z_{\tilde{\pi}}$ und $B_{\tilde{\pi}}$ wieder $(1+\tilde{\pi})(A+ca_o)$ bzw. $(1+\tilde{\pi})B$ bedeuten und x eine für das folgende als konstant unterstellte Struktur der Produktionsmengen bezeichnet, mit der die einzelnen Sektoren gewichtet werden. Den durch (6.4o) zusammen mit der (6.32) entsprechenden Gleichung

$$p(t+1) = p(t)(Z_{\tilde{\pi}}+r(t+1)B_{\tilde{\pi}}) \qquad (6.41)$$

beschriebenen Zusammenhang wollen wir als Modell 6.5 bezeichnen.

Lösung des Modells. Vom Gewinnzuschlagsatz $\tilde{\pi}$ und den in c zum Ausdruck kommenden Lohnforderungen wollen wir annehmen, sie entsprächen nicht bereits der gesamten Wertschöpfung (oder mehr), sondern ließen noch Spielraum für positive Zinszahlungen. Nach Satz 5.5 und Satz 5.6 bedeutet das, daß der maximale Eigenwert von $Z_{\tilde{\pi}}$ kleiner ist als 1. Dann gilt:

Satz 6.11: Modell 6.5 besitzt eine (bis auf ein Vielfaches) eindeutig bestimmte Lösung mit konstanten Preisen $\bar{p}$. Der zu dieser Lösung gehörige (konstante) Zinssatz ist eindeutig bestimmt und positiv.

Beweis: Eine konstante Lösung muß die Gleichung

$$(6.42) \quad \bar{p} = \bar{p}(Z_{\tilde{\pi}} + \bar{r}B_{\tilde{\pi}})$$

erfüllen, die äquivalent zu $\bar{p} = \bar{r}\bar{p}B_{\tilde{\pi}}(E-Z_{\tilde{\pi}})^{-1}$ ist, womit die Behauptung aus dem Theorem von Frobenius folgt. //

Die Lösung (6.42) stimmt mit der Gleichgewichtslösung von Modell 5.3 für die Werte c, $\tilde{\pi}$ und $\bar{r}$ überein. Wieder gilt hier jedoch im Gegensatz zu Modell 5.3:

Satz 6.12: Jede Lösung von Modell 6.5 mit $p(o) \geqslant o$ konvergiert gegen eine Lösung der Form (6.42).

Beweis: Siehe Bródy [2, S. 9o f].[1]

Diskussion der Lösung. Entsprechend der Situation in Modell 6.4 ergibt sich, daß, wenn der Zinssatz die beschriebene Anpassungstendenz hat, die Preise gegen eine konstante Gleichgewichtslösung von Modell 5.3 konvergieren.

---

1 Bródy gibt das nichtlineare Differenzengleichungssystem $p(t+1) = p(t)A + \frac{p(t)(E-A)x}{p(t)Bx}p(t)B$ als Algorithmus zur Bestimmung des Linkseigenvektors $\bar{p}$ zum maximalen Eigenwert $1/\bar{r}$ von $B(E-A)^{-1}$ an.

Es ist natürlich ziemlich willkürlich, einmal für den Gewinnzuschlagsatz und einmal für den Zinssatz, jeweils bei Konstanz der übrigen Größen, eine Anpassungstendenz zu postulieren. Die dargestellten Ansätze sollen vielmehr zeigen, daß durchaus Mechanismen vorstellbar sind, deren Zusammenwirken in Richtung der Realisierung der gleichgewichtigen Lösungspfade der Gleichgewichts-Input-Output-Preismodelle geht.

Kapitel 7 Ungleichgewichtige Input-Output-Mengenmodelle

Die in Teil 1 untersuchten gleichgewichtigen Input-Output-Mengenmodelle sind durch die Eigenschaft gekennzeichnet, daß in jeder Periode die den Kapazitäten der einzelnen Sektoren entsprechenden Produktionsmengen restlos Verwendung finden als Vorleistungen, Investitionen und Endnachfrage. Interpretiert man die durch die Kapazitäten bestimmten Mengen als geplantes Angebot und die drei Verwendungskomponenten als geplante Nachfrage, so entspricht das der Gleichgewichtsbedingung "geplantes Angebot = geplante Nachfrage". In der Realität ist diese Bedingung im allgemeinen nicht erfüllt. Ein dynamisches (Ungleichgewichts-)Modell, das das geplante Angebot und die geplante Nachfrage erklärt, muß daher Annahmen darüber enthalten, wie die Pläne im Falle eines Ungleichgewichts zwischen Angebot und Nachfrage revidiert werden, das heißt, wie hoch dann die tatsächlich realisierte Produktion ist und gegebenenfalls wie sie auf die Nachfragekomponenten verteilt wird.

Wir werden in diesem Kapitel reine Nachfragemodelle untersuchen, das heißt, wir werden stets die Höhe der Produktion als durch die jeweilige Nachfrage bestimmt ansehen.[1] Das setzt natürlich voraus, daß eine entsprechende Produktion vom Kapitalbestand und von den laufenden Inputs her auch möglich ist;[2] diese

---

1 Demgegenüber könnte man die Gleichgewichtsmodelle als Angebots-orientiert bezeichnen. Für Mehrsektoren-Angebotsmodelle besteht die Frage nach der Aufteilung der produzierten Güter auf die verschiedenen Sektoren, für Modelle mit sektoralen Nachfragefunktionen dagegen nicht.

2 Andere Produktionsfaktoren wie Arbeit und Importe werden wir dabei - wie bisher - außer Betracht lassen.

Bedingung werden wir daher für die sich als Lösungen ergebenden Produktions(=Nachfrage-)Mengenpfade zu prüfen haben.

§ 1 Modelle mit exogener Endnachfrage

Formulierung von Modell 7.1. Bezeichnen wir die in Periode t nachgefragten Vorleistungs-, Investitions- und Endnachfragegütermengen mit den Vektoren $a^n(t)$, $z^n(t)$ bzw. $f^n(t)$ (n für nachgefragt) und bezeichnen wir mit x(t) die Produktion der Periode t, so besagt die Hypothese der Anpassung der Produktion an die Nachfrage:

$$(7.1) \quad x(t) = a^n(t) + z^n(t) + f^n(t).$$

Für die Endnachfrage wollen wir in diesem Paragraphen wie in Modell 1 annehmen, sie wachse mit einer exogen gegebenen Rate w:

$$(7.2) \quad f^n(t) = (1+w)^t f(o).$$

Die von den Unternehmern geplanten Produktionsmengen richten sich nach den Erwartungen der Unternehmer über die zukünftige Nachfrage. Wir wollen von der einfachen Hypothese ausgehen, daß diese Erwartungen in der Annahme eines Wachstums der gesamten Volkswirtschaft mit der Rate $w^e \geq o$ besteht, unterstellen also, daß jeder Unternehmer annimmt, die auf ihn in der Periode t+1 zukommende Nachfrage sei $(1+w^e)$-mal so groß wie in der Periode t. Planung der Produktion in Höhe der erwarteten Nachfrage bedeutet dann Plangrößen $x^{pl}(t+1)$ in Höhe von

$$(7.3) \quad x^{pl}(t+1) = (1+w^e)x(t),$$

da die Produktion x(t) ja gerade gleich der gesamten

Nachfrage der Periode t ist. Unterstellen wir, daß die Unternehmer jeweils Vorleistungen nachfragen in einer Höhe, wie es ihrer geplanten Produktion entspricht, so ergibt sich aus (7.3):

$$(7.4) \quad a^n(t+1) = Ax^{pl}(t+1) = (1+w^e)Ax(t).$$

In die Planung der Investitionen geht neben den Erwartungen bezüglich der zukünftigen Nachfrage sicherlich auch der jeweilige Auslastungsgrad der Produktionskapazität ein. Für Situationen, in denen die Auslastung in etwa der gewünschten (Normal-)Auslastung entspricht, können wir aber davon ausgehen, daß die Höhe der geplanten Investitionen sich im wesentlichen nach dem erwarteten Nachfragezuwachs

$$(7.5) \quad \Delta x^{pl}(t+1) = w^e x^{pl}(t+1)$$

von Periode t+1 zu Periode t+2 richtet.[1] Ein geplantes Wachstum der Produktionskapazitäten um diesen Betrag führt zu einer Nachfrage nach Investitionsgütern in Periode t+1 in Höhe von

$$(7.6) \quad z^n(t+1) = B\Delta x^{pl}(t+1) = w^e(1+w^e)Bx(t).$$

Wir werden zu überprüfen haben, ob die Situation einer normalen Kapazitätsauslastung, wie sie für die Ableitung der Investitionsnachfragefunktion (7.6) unterstellt wurde, für die sich daraus ergebende Entwicklung auch tatsächlich gegeben ist.

---

1 Wir vernachlässigen hier andere Bestimmungsgründe der Investitionen. Damit setzen wir voraus, daß Investitionen - soweit sie zu voll (= normal) ausgelasteten Kapazitäten führen - stets ausreichend rentabel sind.

Den durch (7.1-6) beschriebenen Zusammenhang wollen wir als Modell 7.1 bezeichnen. Die sich gemäß diesem Modell ergebenden Produktionsmengenpfade werden beschrieben durch die Lösungen des Differenzengleichungssystems

$$(7.7)\quad x(t+1) = (1+w^e)(A+w^eB)x(t) + (1+w)^{t+1}f(o),$$

das sich durch Einsetzen von (7.2/4/6) in (7.1) ergibt.

Im allgemeinen werden die nach (7.7) produzierten Mengen $x(t+1)$ nicht mit den geplanten Produktionsmengen $x^{pl}(t+1)$ nach (7.3) übereinstimmen. Ist $x_j(t+1) < x_j^{pl}(t+1)$, so bedeutet das, daß die Unternehmen im Sektor j den Teil der von ihnen nachgefragten Vorleistungsgütern, der die bei der Produktion von $x_j(t+1)$ benötigten übersteigt, auf Lager nehmen müssen; entsprechend müssen für $x_j(t+1) > x_j^{pl}(t+1)$ Bestände an Vorleistungsgütern im Sektor j bestehen, aus denen die Lücke zwischen benötigten und nachgefragten Vorleistungsgütern geschlossen werden kann.

Alternativ zu unserer bisherigen Interpretation könnte man unterstellen, daß die geplanten Mengen auch tatsächlich produziert werden. (7.3) würde dann die Höhe der Produktion beschreiben und (7.1) den Absatz. $x_j(t+1) \neq x_j^{pl}(t+1)$ bedeutete dann eine Veränderung des Bestandes an von Sektor j produzierten Gütern.

In beiden Versionen könnten die sich ergebenden (ungeplanten) Lagerbestandsveränderungen die Nachfrage nach Vorleistungen in der nächsten Periode (t+2) beeinflussen und somit (7.4) außer Kraft setzen. Wir wollen diese Einflüsse jedoch vernachlässigen[1] und

---

1 Vgl. dazu auch Modell 7.2, wo dieses Problem nicht auftaucht.

uns auf (7.3) und (7.5) als Beschreibung der Anpassung der Pläne der Unternehmer an die jeweilige Absatzlage beschränken. Dieses Vorgehen wird wiederum gewissermaßen ex post noch zu rechtfertigen sein, da diese Vereinfachung natürlich nur dann zulässig ist, wenn die in Modell 7.1 beschriebene Entwicklung nicht zu immer größer werdenden Abweichungen zwischen geplanten und realisierten Größen führt.

Lösung des Modells. Nach den Ergebnissen von Kapitel 1 ist $\lambda_1 = 1/\mu_1$, wo μ_1 der maximale Eigenwert von $(E-A)^{-1}B$ ist, eine obere Grenze für das Wachstum einer Volkswirtschaft mit den durch A und B gegebenen Produktionsbedingungen. Genau wenn gilt:

(7.8) $w < \lambda_1$,

ist es überhaupt möglich, eine mit der Rate w wachsende Endnachfrage auch langfristig zu befriedigen. Wir werden daher im folgenden (7.8) voraussetzen.

Die Partikulärlösung von (7.7) ergibt sich als

(7.9) $\bar{x}(t) = (1+w)^t \bar{x}(o)$

mit

(7.1o) $\bar{x}(o) = (E - \frac{1+w^e}{1+w}(A+w^eB))^{-1} f(o)$.

Für gegebenes w ist der maximale Eigenwert von $(1+w^e)/(1+w)(A+w^eB)$ eine in Abhängigkeit von w^e (unbeschränkt) streng monoton steigende Funktion. $\bar{w}^e$ sei derjenige Wert für die erwartete Wachstumsrate w^e, für den dieser maximale Eigenwert gerade 1 ist. Es gilt:

Satz 7.1: $w < \bar{w}^e < \lambda_1$.

Beweis: Bezeichnen wir mit $\varrho(w^e)$ den maximalen Eigenwert von $A+w^eB$, so gilt für $w^e = \lambda_1$: $\varrho(w^e) = 1$ (vgl. Satz 6.8) und damit nach (7.8): $(1+w^e)/(1+w)\varrho(w^e) > 1$, womit gezeigt ist, daß $\bar{w}^e < \lambda_1$ ist. Andererseits gilt für $w^e = w < \lambda_1$: $(1+w^e)/(1+w)\varrho(w^e) = \varrho(w^e) < 1$, woraus $w < \bar{w}^e$ folgt. //

Damit können wir folgenden Satz formulieren:

Satz 7.2: (i) Für $w^e < \bar{w}^e$ existiert die Partikulärlösung (7.9/1o) und ist für beliebiges $f(o) \geq o$ positiv. Die Partikulärlösung ist relativ stabil.

(ii) Für $w^e > \bar{w}^e$ konvergiert jede Lösung von (7.7) mit $x(o) \geq o$ gegen einen positiven Pfad der Form

(7.11) $$x(t) = \alpha(1+w^r)^t e.$$

(iii) Für die nach (ii) langfristig realisierte Wachstumsrate w^r gilt: $w^r > w$ und darüber hinaus: $w^r < w^e$ genau dann, wenn $w^e < \lambda_1$.

Beweis: (i) $w^e < \bar{w}^e$ besagt gerade, daß die inverse Matrix in (7.1o) existiert und daß der maximale Eigenwert der Matrix des homogenen Teils von (7.7) $(1+w^e)\varrho(w^e)$ kleiner ist als der Wachstumsfaktor $1+w$ der Partikulärlösung.

(ii), (iii) Für $w^e > \bar{w}^e$ gilt entsprechend $1+w^r := (1+w^e)\varrho(w^e) > 1+w$. Damit bestimmt der maximale Eigenwert $1+w^r$ des homogenen Systems samt dem zugehörigen Eigenvektor e langfristig den Verlauf jeder Lösung, die einen Anteil von e enthält, was aus $x(o) \geq o$ (wie im Beweis von Satz 6.2 (ii) folgt. Die letzte Behauptung von (iii) folgt daraus, daß $\varrho(w^e) < 1$ genau dann gilt, wenn $w^e < \lambda_1$ ist. //

Diskussion der Lösung. 1. Für $w^e = w$ stimmt das sich langfristig ergebende Wachstum (Satz 7.2 (i)) mit den Erwartungen der Unternehmer überein. Somit entspricht auch die an diesen Erwartungen ausgerichtete Vorleistungsnachfrage (7.4) den tatsächlichen Erfordernissen der Produktion, und die Investitionen (7.6) führen zu einem Wachstum der Kapazitäten in einem dem Wachstum der Produktion entsprechenden Ausmaß. Die Konstanz der Beziehungen (7.4) und (7.6) ist in diesem Fall also durchaus plausibel.

2. Für $w^e = w$ stimmt die Partikulärlösung von Modell 7.1 mit der Gleichgewichtslösung von Modell 1 überein (vgl. (1.12) mit (7.10)). Auch für Modell 1 hatten wir in Kapitel 4, § 2 (vgl. Seite 93) ausgeführt, daß (nur) im Falle von mit w übereinstimmenden Erwartungen der Unternehmer bezüglich des zukünftigen Wachstums eine Entwicklung gemäß der Gleichgewichtslösung wahrscheinlich ist. Zusätzlich muß in Modell 1 eine ganz bestimmte - die gleichgewichtige - Struktur der Produktions- (=Kapazitäts-)mengen in der Ausgangsperiode gegeben sein, damit die Gleichgewichtslösung resultiert. Demgegenüber ist die Gleichgewichtslösung innerhalb von Modell 7.1 stabil. Das in (7.3) bis (7.7) beschriebene Nachfrageverhalten der Unternehmer führt stets dazu, daß bei Abweichungen von der gleichgewichtigen Struktur eine Tendenz zum Pfad gleichgewichtigen Wachstums hin besteht.

3. Falls das von den Unternehmern erwartete Wachstum nicht mit dem Wachstum der Endnachfrage übereinstimmt, ergibt sich in Modell 7.1 langfristig eine Wachstumsrate w^r, die von der erwarteten Rate w^e abweicht. Im Fall $w^e > w^r$ würden damit bei der im Modell unterstellten Konstanz des Verhaltens ständig zu viel Vorleistungen und Investitionsgüter bezogen, was zu ständig steigenden Lagerbeständen und Überkapazitäten

führen würde. Entsprechend würden für $w^e < w^r$ ständig zu wenig Vorleistungen und Investitionsgüter bezogen, was zu ständig sinkenden (und sogar negativen) Lagerbeständen und zu Unterkapazitäten führen würde. Für die Situation $w^e \neq w$ ist die in (7.3) bis (7.7) zum Ausdruck kommende Konstanz des Erwartungs- und Nachfrageverhaltens damit offenbar unrealistisch.

4. Das für $w^e < w$ resultierende Wachstum (mit der Rate w) ist größer als das erwartete Wachstum. Das für $w^e > w$ resultierende Wachstum (mit der Rate w bzw. w^r) ist nach Satz 7.2 kleiner als das erwartete Wachstum, jedenfalls wenn w^e kleiner als λ_1 ist, wovon wir ausgehen wollen.[1] Unterstellen wir, daß für $w^e \neq w$ die erwartete Rate w^e die Tendenz hat, sich an die tatsächlich resultierende Wachstumsrate anzupassen, so würde damit stets langfristig die Gleichgewichtslösung resultieren.

Für $w^e > w$ treten im Laufe des Anpassungsprozesses Überkapazitäten und positive Lagerbestandsveränderungen an Vorleistungsgütern auf, so daß eine Verringerung der geplanten Investitionen und der nachgefragten Vorleistungen durchaus plausibel ist. Für $w^e < w$ treten im Laufe des Anpassungsprozesses entsprechend Unterkapazitäten und eine Verringerung der Lagerbestände auf, so daß hier eine Erhöhung der nachgefragten Mengen ebenfalls plausibel ist. Voraussetzung für die Realisierbarkeit dieser Erhöhung ist dabei die Möglichkeit einer temporären Überbeschäftigung der Produktionsfaktoren, die für nicht zu große Abweichungen $w^e < w$ wohl auch als gegeben angesehen werden können.

---

1 λ_1 ist das maximal mögliche Wachstum, das nur bei einer Endnachfrage von Null realisiert werden könnte. λ_1 ist also wohl wesentlich größer als das tatsächliche Wachstum der Volkswirtschaft, auf dessen Beobachtung die erwartete Rate w^e beruht.

Eine Variation von Modell 7.1. In Modell 7.1 gingen wir davon aus, daß die Unternehmer ihre Nachfrageentscheidungen für die Periode t+1 auf der Grundlage der von ihnen geplanten Mengen $x^{pl}(t+1)$ treffen. Unterstellen wir stattdessen, es sei den Unternehmern möglich, ihre Dispositionen bezüglich der in Periode t+1 nachgefragten Vorleistungen erst in der laufenden Periode t+1 in Kenntnis der bei ihnen eingehenden Nachfrage zu treffen, so ist (7.4) zu ersetzen durch

$$(7.12) \quad a^n(t+1) = Ax(t+1).$$

Den mit (7.12) anstelle von (7.4) beschriebenen Zusammenhang wollen wir als Modell 7.2 bezeichnen.[1]

Lösung von Modell 7.2. Modell 7.2 wird durch das Differenzengleichungssystem

$$(7.13) \quad x(t+1) = Ax(t+1) + w^e(1+w^e)Bx(t) + (1+w)^{t+1}f(o)$$

oder

$$(7.14) \quad x(t+1) = w^e(1+w^e)(E-A)^{-1}Bx(t) + (1+w)^{t+1}(E-A)^{-1}f(o)$$

beschrieben. Die Struktur der Partikulärlösung lautet:

$$(7.15) \quad \bar{x}(o) = (E-A-\frac{1+w^e}{1+w}w^eB)^{-1}f(o).$$

---

1 Modell 7.1 ist rein rekursiv: Die endogenen Variablen $a^n(t)$, $z^n(t)$, $x(t)$ lassen sich direkt in Abhängigkeit von den vorherbestimmten Variablen $f(t)$ und $x(t-1)$ angeben. Modell 7.2 ist dagegen interdependent, da $a^n(t)$ von $x(t)$ und $x(t)$ von $a^n(t)$ abhängt.

Bezeichnet wieder $\bar{w}^e$ denjenigen Wert für die erwartete Wachstumsrate w^e, für den der maximale Eigenwert von $A+((1+w^e)/(1+w))w^eB$ gerade 1 ist, so gilt entsprechend zu den vorangegangenen Sätzen:

Satz 7.3: $w < \bar{w}^e < \lambda_1$.

Beweis: Wie zu Satz 7.1.//

Satz 7.4: (i) Für $w^e < \bar{w}^e$ existiert die Partikulärlösung (7.9/15) und ist für beliebiges $f(o) \geq o$ positiv. Die Partikulärlösung ist relativ stabil.

(ii) Für $w^e > \bar{w}^e$ konvergiert jede Lösung von (7.14) mit $x(o) \geq o$ gegen einen positiven Pfad der Form

(7.16) $$x(t) = \alpha(1+w^r)^t e_1,$$

wo e_1 der Eigenvektor von $(E-A)^{-1}B$ zum Eigenwert μ_1 ist.

(iii) Für die nach (ii) langfristig realisierte Wachstumsrate w^r gilt: $w^r > w$ und darüber hinaus: $w^r < w^e$ genau dann, wenn $w^e < \lambda_1$.

Beweis: Der maximale Eigenwert der Matrix des homogenen Teils von (7.14) ist $w^e(1+w^e)\mu_1$. Die Behauptungen des Satzes folgen dann aus

(7.17) $\frac{1+w^e}{1+w} w^e < \lambda_1$ genau dann, wenn $(1+w^e)w^e\mu_1 < 1+w$.//

Nach Satz 7.4 hat Modell 7.2 im wesentlichen dieselben Eigenschaften wie Modell 7.1. Unter der entsprechenden Annahme über die Anpassung der Erwartungen über das Wachstum an das realisierte Wachstum führt also auch das in Modell 7.2 zugrunde gelegte Nachfrageverhalten der Unternehmer langfristig stets zur Realisierung des gleichgewichtigen Wachstumspfades von Modell 1.

§ 2 Endogenisierung der Endnachfrage

Formulierung eines geschlossenen Modells. Entsprechend dem Vorgehen in Kapitel 3 können wir das offene Modell 7.1 durch Endogenisierung der Endnachfrage in ein geschlossenes Modell überführen. Dazu ersetzen wir (7.2) durch

$$(7.18)\quad f^n(t+1) = cY^e(t+1)$$

mit

$$(7.19)\quad Y^e(t+1) = (1+w^e)Y(t).$$

Wir unterstellen also, daß die Endnachfrage der Periode t+1 vermöge sektoraler Endnachfrageneigungen c vom für diese Periode erwarteten Volkseinkommen $Y^e(t+1)$ abhängt, wobei wir für die Erwartungen wieder die erwartete Wachstumsrate w^e zugrunde legen. Schreiben wir das Volkseinkommen Y(t) (konstante Preise vorausgesetzt, vgl. Kapitel 3, § 2) als

$$(7.2o)\quad Y(t) = vx(t)$$

mit v als (konstantem) Wertschöpfungsvektor, so ergibt sich die Endnachfrage $f^n(t+1)$ als

$$(7.21)\quad f^n(t+1) = (1+w^e)\,cvx(t).$$

Den Modell 7.1 entsprechenden Zusammenhang mit (7.21) anstelle von (7.2) wollen wir als Modell 7.3 bezeichnen. Modell 7.3 wird beschrieben durch das Differenzengleichungssystem

$$(7.22)\quad x(t+1) = (1+w^e)(Z+w^eB)x(t),$$

wo $Z = A+cv$ ist.[1]

Nach Kapitel 3 ist ein Wachstum der Volkswirtschaft nur möglich, wenn die Endnachfrage nicht größer ist als der Überschuß der Produktion über die dazu erforderlichen Vorleistungen, was bei gegebenen Preisen eine nominale Endnachfragequote in bezug auf das nominale Volkseinkommen von weniger als 1 bedeutet oder rein mengenmäßig als die Bedingung interpretiert werden kann, daß die pro Arbeitsstunde konsumierten Mengen durch den Einsatz von weniger als einer Arbeitsstunde (direkter und indirekter Arbeitsinput) produziert werden können. Für die Matrix Z bedeutet das, daß ihr maximaler Eigenwert kleiner ist als 1, wovon wir im folgenden ausgehen wollen.

Es sei μ_1 der maximale Eigenwert von $(E-Z)^{-1}B$ und $\lambda_1 = 1/\mu_1$. $\varrho(w^e)$ bezeichne den maximalen Eigenwert von $Z+w^eB$ und e den zugehörigen Eigenvektor. Dann gilt:

Satz 7.5: (i) Jede Lösung von Modell 7.3 mit $x(o) \geqq o$ konvergiert relativ gegen eine Lösung der Form

$$x(t) = ((1+w^e)\varrho(w^e))^t\, e. \tag{7.23}$$

(ii) Der Wachstumsfaktor $(1+w^e)\varrho(w^e)$ ist kleiner als, gleich bzw. größer als $1+w^e$ genau dann, wenn w^e kleiner als, gleich oder größer als λ_1 ist.

---

1 Entsprechend zu Kapitel 3, § 2 könnten wir auch wieder verschiedene Einkommenskategorien mit unterschiedlichen Endnachfrageneigungen berücksichtigen. Z wäre dann wie in Kapitel 3, § 2 durch $Z = A+CV$ zu ersetzen.

Beweis: $(1+w^e)\varsigma(w^e)$ ist der maximale Eigenwert der Matrix des homogenen Differenzengleichungssystems (7.22). Damit ist (i) klar. (ii) folgt aus

(7.24) $\varsigma(w^e) \gtreqless 1$ genau dann, wenn $w^e \lesseqgtr \lambda_1$. //

Diskussion der Lösung. 1. Für $w^e = \lambda_1$ stimmt die erwartete Wachstumsrate mit der sich tatsächlich ergebenden Wachstumsrate überein. Da damit weder für die Unternehmer noch für die Konsumenten Veranlassung besteht, ihre Erwartungen zu revidieren und damit von dem in (7.4), (7.6) und (7.21) beschriebenen Verhalten abzuweichen, sind für diesen Fall diese Verhaltensgleichungen plausibel.

2. Für $w^e = \lambda_1$ stimmt die Lösung (7.23) mit der Gleichgewichtslösung von Modell 3.1 (mit vollständig endogenisierter Endnachfrage) überein. Anders als in Modell 3.1 stellt (7.23) in Modell 7.3 eine relativ stabile Lösung dar.

3. Für $w^e \neq \lambda_1$ stimmt die tatsächliche Entwicklung nicht mit den Erwartungen überein. Die Lösungen von Modell 7.3 führen somit in dieser Situation zu immer größeren Abweichungen der Produktion von der Kapazität und zu immer größeren Lagerbestandsveränderungen, sie können daher nicht als realistische Beschreibung einer sich tatsächlich ergebenden Entwicklung angesehen werden.

4. Unterstellt man für $w^e \neq \lambda_1$ eine Anpassung der Erwartungen an die aus den Erwartungen resultierende Entwicklung, so führt das (anders als in Modell 7.1) immer weiter weg vom gleichgewichtigen Wachstum. Die Gleichgewichtslösung von Modell 3.1 stellt somit auch innerhalb von Modell 7.3 ein Wachstum "auf des Messers Schneide" dar. Anders als in Modell 3.1 bezieht sich

diese Instabilität aber nur auf die erwartete Wachstumsrate w^e. Bei "richtiger" Erwartung des Wachstums ($w^e = \lambda_1$), aber "falscher" Produktionsmengenstruktur ($x(o) \neq e$) besteht innerhalb von Modell 7.3 die Tendenz zur Realisierung des Gleichgewichtswachstums.

5. Entsprechend dem Ansatz eines nach unten inflexiblen Lohnsatzes in Modell 6.3 könnte man in Modell 7.3 einen Ratchet-Effekt für die Endnachfrage berücksichtigen. Wählt man dabei den Ansatz

$$(7.25) \quad f^n(t+1) = \text{Max}\{(1+w^e)f^n(t),\ (1+w^e)cvx(t)\},$$

so erhält man für $w^e < \lambda_1$ eine Entwicklung gemäß Modell 7.1 mit $w = w^e$ und damit ebenfalls eine stabile Entwicklung.

Eine Variation von Modell 7.3. Entsprechend dem Modell 7.2 können wir auch für das Modell mit endogener Endnachfrage den Fall betrachten, daß die Vorleistungsnachfrage und - wie wir hier in Analogie der Einfachheit halber unterstellen wollen - die Endnachfrage schon in Kenntnis der Produktion $x(t+1)$ bzw. der Wertschöpfung $Y(t+1)$ getätigt wird. Anstelle von (7.22) erhielten wir dann das Differenzengleichungssystem

$$(7.26) \quad x(t+1) = Zx(t+1) + (1+w^e)w^eBx(t)$$

oder aufgelöst nach $x(t+1)$:

$$(7.27) \quad x(t+1) = (1+w^e)w^e(E-Z)^{-1}Bx(t).$$

Man erkennt unmittelbar, daß genau für $w^e = \lambda_1$ aus (7.27) langfristig ein Wachstum mit Wachstumsfaktor $(1+w^e)w^e\ \mu_1 = 1+w^e$ und der gleichgewichtigen Struktur e_1 resultiert und auch die übrigen Aussagen über Modell 7.3 entsprechend gelten.

§ 3 Ein Modell mit endogenen Wachstumsraten

Offensichtlich ist die exogen gegebene, konstante Wachstumsrate der Endnachfrage in Modell 7.1 gegenüber dem Modell 7.3 das stabilisierende Element. Wird die Endnachfrage endogenisiert, so hängt das (nach Modell 7.3) resultierende Wachstum ausschließlich von den Erwartungen, repräsentiert durch die erwartete Wachstumsrate w^e, ab. Dabei erzeugen "zu große" (gemessen an den bestehenden Wachstumsmöglichkeiten) Erwartungen "erst recht zu großes" Wachstum und umgekehrt. Eine stabile Entwicklung kann sich daher für Modell 7.3 nur ergeben, wenn in die Erwartungsbildung die tatsächlich gegebenen Wachstumsmöglichkeiten der Volkswirtschaft eingehen. Wir wollen daher ein weiteres Modell analysieren, das diesen Sachverhalt berücksichtigt.

Formulierung des Modells. Wir gehen aus von den Modell 7.3 zugrunde liegenden Zusammenhängen, bis auf die Tatsache, daß wir die erwartete Wachstumsrate als im Zeitablauf variabel ansehen und endogen innerhalb des Modells bestimmen. Das bedeutet, daß die Produktion der Periode t+1 durch die ((7.22) entsprechende) Gleichung

$$(7.28) \quad x(t+1) = (1+w^e(t+1))(Z+w^e(t+1)B)x(t)$$

beschrieben wird, worin $w^e(t+1)$ die - noch zu bestimmende - in Periode t für die zukünftige Entwicklung erwartete Wachstumsrate bedeutet.

Um die Wachstumsmöglichkeiten der Volkswirtschaft, wie sie sich in Periode t darstellen, abzuschätzen, machen wir folgende Überlegung: $s(t) = (E-Z)x(t)$

ist derjenige Teil der Produktion $x(t)$, der über die tatsächlich in Periode t gebrauchten Vorleistungen $Ax(t)$ und die einer Produktion von $x(t)$ entsprechende Endnachfrage $cvx(t)$ hinaus erwirtschaftet worden ist. Der Vektor $s(t)$ gibt also diejenigen Mengen an, die aus der Produktion der Periode t für investive Zwecke zur Verfügung stehen. Sie stimmen im allgemeinen nicht mit den Mengen überein, die in Periode t als Investitionen nachgefragt wurden, da diese Nachfrage aus den Erwartungen der Periode t-1 resultierte. Vergleicht man die Mengen $s(t)$ mit dem Kapital $k(t) = Bx(t)$, das zur Produktion der Mengen $x(t)$ erforderlich ist, so erhält man Aufschluß über die Wachstumsmöglichkeiten der Volkswirtschaft.

Allerdings resultieren je nach Verteilung des "Überschusses" $s(t)$ auf die verschiedenen Sektoren völlig unterschiedliche mögliche sektorale Wachstumsraten. Einen gewissen Mittelwert für die Wachstumsmöglichkeiten erhält man ohne Zugrundelegung einer Aufteilung von $s(t)$, wenn man bei gegebenen Preisen p den Wert $ps(t)$ des Überschusses ins Verhältnis setzt zum Wert $pk(t)$ des Kapitalbestandes $k(t)$. Wir wollen nun annehmen, die erwartete Wachstumsrate $w^e(t+1)$ resultiere als eine derartig global gebildete Rate möglichen Wachstums, wie sie sich aus der in Periode t realisierten Situation ergibt:

$$(7.29) \quad w^e(t+1) = \frac{p(E-\Sigma)x(t)}{pBx(t)} .$$

$w^e(t+1)$ hängt von der zugrunde gelegten Preisstruktur $p > o$, die wir für das folgende als konstant unterstellen, ab; die im folgenden abgeleiteten Ergebnisse (vgl. Satz 7.6) gelten dagegen unabhängig von p.

Den durch (7.28) und (7.29) beschriebenen Zusammenhang bezeichnen wir als Modell 7.4. Mit (7.29) unterstellen wir in Modell 7.4 die Erwartung, daß die bestehenden Wachstumsmöglichkeiten voll genutzt werden. Das ähnelt der Gleichgewichtsbedingung, daß die Produktion restlos Verwendung findet als Vorleistung, Investition oder Endnachfrage. Der wesentliche Unterschied besteht darin, daß wir hier nicht für die Produktion jeden Sektors die restlose Verwendung fordern, was in den Gleichgewichtsmodellen zu einer Aufteilung der zu investierenden Mengen nach dem Kriterium "Aufteilung ohne Rest" und damit zu ökonomisch unsinnigen Entwicklungen führt, sondern nur global die Tendenz zur Ausschöpfung der Wachstumsmöglichkeiten unterstellen. Insbesondere ist durch (7.29) keinerlei Aufteilung der "Überschüsse" s(t) auf die einzelnen investierenden Sektoren impliziert. Die aus (7.29) (vermöge (7.4), (7.6) und (7.21)) resultierende Nachfrage in der Periode t+1 wird vielmehr im allgemeinen nicht mit der (nach (7.3)) geplanten Produktion übereinstimmen. Wir nehmen jedoch wieder an, daß sie - bei temporärer Über- oder Unterbeschäftigung der Produktionsfaktoren - befriedigt werden kann.

Lösung des Modells.

Satz 7.6: Jede Lösung von Modell 7.4 mit $x(o) \geqq o$ konvergiert gegen eine Gleichgewichtslösung von Modell 3.1 (mit vollständig endogener Endnachfrage).

Beweis: Zu einer gegebenen Lösung x(t) von Modell 7.4 sei $\tilde{x}(t)$ definiert durch

$$(7.3o) \quad \tilde{x}(t) = x(t) / \prod_{\tau=1}^{t} (1+w^{e}(\tau)).$$

$\tilde{x}(t)$ erfüllt dann das Differenzengleichungssystem

(7.31) $\tilde{x}(t+1) = (Z+w^e(t+1)B)\tilde{x}(t)$,

und da $w^e(t+1)$ in (7.29) offenbar nur von der Struktur von $x(t)$ abhängt, nicht von der absoluten Höhe der einzelnen Komponenten, gilt:

(7.32) $$w^e(t+1) = \frac{p(E-Z)\tilde{x}(t)}{pB\tilde{x}(t)} \quad .$$

(7.31/32) stimmt (bis auf Transponieren) formal mit dem Differenzengleichungssystem (6.4o/41) von Modell 6.5 überein. Nach Satz 6.12 müssen damit $\tilde{x}(t)$ und $w^e(t)$ gegen konstante Wert $\bar{x}$ und $\bar{w}$ konvergieren mit

(7.33) $\bar{x} = (Z+\bar{w}B)\bar{x}$.

Dann konvergiert $x(t)$ gegen eine Lösung

(7.34) $x(t) = (1+\bar{w})^t\bar{x}$.

(7.33) entnimmt man, daß $\bar{w} = \lambda_1$ und $\bar{x}$ Eigenvektor der Matrix $(E-Z)^{-1}B$ zu μ_1 ist.

Für den Pfad (7.34) stimmt das erwartete Wachstum mit dem sich tatsächlich ergebenden Wachstum überein, so daß die Lösungen von Modell 7.4 auch ökonomisch stabil sind.

Eine Variation von Modell 7.4. Nehmen wir wieder an, daß die Vorleistungs- und Endnachfrage auf den in Periode t+1 realisierten Werten beruhen anstelle der für die Periode t+1 geplanten, so ist (7.28) durch die (7.27) entsprechende Gleichung

(7.35) $x(t+1) = (1+w^e(t+1))w^e(t+1)(E-Z)^{-1}Bx(t)$

zu ersetzen. Auch für das Differenzengleichungssystem (7.29/35) gilt:

Satz 7.7: Jede Lösung von (7.29/35) mit $x(o) \geqq o$ konvergiert gegen eine Gleichgewichtslösung von Modell 3.1 (mit vollständig endogener Endnachfrage).

Beweis: Mit demselben Ansatz für $\tilde{x}(t)$ wie im Beweis von Satz 7.6 führt man (7.29/35) zurück auf das Differenzengleichungssystem

$$\tilde{x}(t+1) = w^e(t+1)M\tilde{x}(t)$$

(7.36)
$$w^e(t+1) = \frac{v\tilde{x}(t)}{pM\tilde{x}(t)}$$

mit

(7.37) $M = (E-Z)^{-1}B$ und $v = p(E-Z)$,

das (bis auf Transponieren) formal mit dem Modell 6.4 zugrunde liegenden Differenzengleichungssystem (6.32/34) übereinstimmt. Damit folgt die Behauptung aus Satz 6.lo.//

Die zuletzt geschilderten Ansätze machen deutlich, daß auch für geschlossene Input-Output-Mengenmodelle Mechanismen vorstellbar sind, die in Richtung auf eine Realisierung der gleichgewichtigen Lösungspfade der Gleichgewichtsmodelle hin wirken.

Anhang: Einige im Text benutzte Definitionen und Sätze

A.1 Für Vektoren $x = (x_1,\ldots,x_n)$ und $y = (y_1,\ldots,y_n)$ werden in dieser Arbeit die Ungleichheitszeichen "$<$", "$\leq$" und "$\leqq$" in folgendem Sinne benutzt:

$$x < y \iff x_i < y_i \quad \text{für alle } i=1,\ldots,n$$
$$x \leq y \iff x_i \leqq y_i \quad \text{für alle } i=1,\ldots,n$$
$$x \leqq y \iff x \leq y \quad \text{und } x \neq y$$

Für Matrizen gelten diese Bezeichnungen entsprechend.

A.2 Für einen Zeilen- oder Spaltenvektor $x = (x_i)_{i=1,\ldots,n}$ bezeichnet $\hat{x}$ die Diagonalmatrix

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} x_1 & & o \\ & x_2 & \\ & \ddots & \\ o & & x_n \end{bmatrix} .$$

Der Begriff der Stabilität. (Vgl. etwa Takayama [4o, S. 51o].) Es bezeichne M eine Menge von Folgen von n-reihigen Vektoren $x(t)$ und $\bar{x}(t)$ eine spezielle solche Folge, die nicht notwendig zu M gehört.

Definition A.3: (i) Man sagt, daß $x(t)$ gegen $\bar{x}(t)$ konvergiert, wenn

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t) = \bar{x}_i(t)$$

für alle $i = 1,\ldots,n$.

(ii) Wenn alle Folgen $x(t)$ aus M gegen $\bar{x}(t)$ konvergieren, heißt $\bar{x}(t)$ stabil in Bezug auf M (oder einfach stabil, wenn der Bezug auf M klar ist).

Definition A.4: (i) Man sagt, daß $x(t)$ relativ gegen $\bar{x}(t)$ konvergiert, wenn es eine reelle Zahl $\alpha > 0$ gibt, so daß

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t)/\bar{x}_i(t) = \alpha$$

für alle $i=1,\ldots,n$.

(ii) Wenn alle Folgen $x(t)$ aus M relativ gegen $\bar{x}(t)$ konvergieren, heißt $\bar{x}(t)$ relativ stabil in Bezug auf M (oder einfach relativ stabil, wenn der Bezug auf M klar ist).

Daß $x(t)$ relativ gegen $\bar{x}(t)$ konvergiert, besagt also, daß die Struktur von $x(t)$ gegen die Struktur von $\bar{x}(t)$ konvergiert, also

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t)/x_j(t) = \lim_{t\to\infty} \bar{x}_i(t)/\bar{x}_j(t)$$

für alle $i,j=1,\ldots,n$,

soweit die jeweiligen Nenner von Null verschieden sind.

Satz A.5: (Theorem über die Invertierbarkeit von Leontief-Matrizen)

1. Sei A eine nichtnegative quadratische Matrix. Dann sind folgende Aussagen paarweise zueinander äquivalent:

(I) $E-A$ ist invertierbar und es gilt $(E-A)^{-1} \geqq o$.

(II) Es existiert ein $x \geqq o$ mit $(E-A)x > o$.

(III) Für jedes $f \geqq o$ existiert ein $x \geqq o$ mit $(E-A)x = f$.

(IV) Alle Eigenwerte von A sind dem Absolutbetrage nach kleiner als 1.

(V) Es existiert ein Vektor $d > o$, so daß alle Spaltensummen von $\hat{d}A\hat{d}^{-1}$ kleiner oder gleich 1 sind.

(VI) Ex existiert ein Vektor $d > o$, so daß alle Spaltensummen von $\hat{d}A\hat{d}^{-1}$ kleiner als oder gleich 1 sind und mindestens eine Spaltensumme jeder Irreduzibilitätskomponente von $\hat{d}A\hat{d}^{-1}$ kleiner als 1 ist.

2. Ist A irreduzibel, so ist jede der obigen Aussagen zusätzlich äquivalent zu jeder der beiden folgenden:

(VII) $E-A$ ist invertierbar und es gilt $(E-A)^{-1} > o$.

(VIII) Es existiert ein $x \geq o$ mit $(E-A)x > o$.

3. Ist eine der obigen Bedingungen erfüllt, so gilt:

$$(E-A)^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} A^{\nu} .$$

Beweis: Takayama [4o, S. 392] und bezüglich (V), (VI): Meyer [25, S. 292].

Satz A.6: (Theorem von Frobenius)

1. Sei A eine quadratische Matrix mit $A \geq O$. Dann gilt:

(i) A hat einen reellen positven Eigenwert λ, für den gilt:

(ii) Zu λ existiert ein Eigenvektor $e > o$.

(iii) Für jeden Eigenwert λ_i von A ist $|\lambda_i| \leq \lambda$.

2. Ist A darüber hinaus irreduzibel, so gilt zusätzlich:

(iv) λ ist ein Eigenwert von der Vielfachheit 1.

(v) e ist positiv und (bis auf ein skalares Vielfaches) eindeutig bestimmt.

(vi) Zu keinem anderen Eigenwert von A existiert ein nichtnegativer Eigenvektor.

3. Ist A darüber (über 2.) hinaus azyklisch[1], so gilt zusätzlich:

(vii) $|\lambda_i| < \lambda$ für alle übrigen Eigenwerte λ_i von A.

Beweis: Takayama [4o, S. 372 ff] und Gantmacher [6, S. 46 ff].

Zu einer nichtnegativen Matrix A nennen wir den in Satz A.6 beschriebenen Eigenwert maximalen Eigenwert und bezeichnen ihn im folgenden Satz kurz mit $\lambda(A)$.

Satz A.7: (Abschätzungen für den maximalen Eigenwert)

1. Seien A und B Matrizen, $A \geqq o$, sei x ein Vektor, $x \geqq o$, und μ eine nichtnegative reelle Zahl. s_i (z_i) sei die i-te Spalten-(Zeilen-)summe von A. Dann gilt:

(i) $A \leqq B \Rightarrow \lambda(A) \leqq \lambda(B)$

(ii) $A < B \Rightarrow \lambda(A) < \lambda(B)$

(iii) $Ax \geqq \mu x \Rightarrow \lambda(A) \geqq \mu$

(iv) $Ax \leqq \mu x \Rightarrow \lambda(A) \leqq \mu$

(v) $\min_i s_i \leqq \lambda(A) \leqq \max_i s_i$

(vi) $\min_i z_i \leqq \lambda(A) \leqq \max_i z_i$

---

1 Eine irreduzible Matrix A heißt zyklisch (= inprimitiv), wenn sie sich durch simultanes Vertauschen von Zeilen und Spalten in die Form einer Blockmatrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & A^{12} & & & \\ & 0 & A^{23} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & A^{r-1,r} \\ A^{r1} & & & & 0 \end{bmatrix}$$

mit quadratischen Hauptdiagonaluntermatrizen bringen läßt (wobei alle in dieser Darstellung leer gelassenen Felder Null-Untermatrizen sind). Andernfalls heißt A azyklisch (= primitiv). Speziell ist jede irreduzible Matrix, die ein von Null verschiedenes Hauptdiagonalelement besitzt, azyklisch.

2. Sei A darüber hinaus irreduzibel. Dann gilt zusätzlich:

(vii) $A \leqslant B \quad \Rightarrow \quad \lambda(A) < \lambda(B)$

(viii) $Ax \geqslant \mu x \quad \Rightarrow \quad \lambda(A) > \mu$

(ix) $Ax \leqslant \mu x \quad \Rightarrow \quad \lambda(A) < \mu$

Beweis: Takayama [4o , S. 372 ff] und Gantmacher [6 , S. 46 ff].

Literaturverzeichnis

[1] Behnke, H. und Sommer, F.: Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. 3. Aufl., Berlin-Heidelberg-New York 1965.

[2] Bródy, A.: Proportions, prices and planning. A mathematical restatement of the labor theory of value. Amsterdam-London 197o.

[3] Dorfmann, R., Samuelson, P. und Solow, R.: Linear programming and economic analysis. New York-Toronto-London 1958.

[4] Duesenberry, J.S., Fromm, G., Klein, L.R. und Kuh, E. (eds.): The Brookings Quaterly Econometric Model of the United States. Chicago-Amsterdam 1965.

[5] Ferguson, C.E.: Inflation, fluctuations, and growth in a dynamic input-output-model. The Southern Economic Journal, Vol. 28 (1961/62), S. 251-264.

[6] Gantmacher, F.R.: Matrizenrechnung Teil II. Spezielle Fragen und Anwendungen. 2. ber. Aufl., Berlin 1966.

[7] Goodwin, R.M.: A note on the theory of inflationary process. Economia Internazionale, Vol. 5 (1952), S. 1-22.

[8] Holley, J.L.: A dynamic model. Econometrica, Vol. 2o (1952), S. 616-642; Vol. 21 (1953), S. 298-324.

[9] Hawkins, D.: Some conditions of macroeconomic stability. Econometrica, Vol. 16 (1948), S. 3o9-322.

[1o] Helmstädter, E.: Linearität und Zirkularität des volkswirtschaftlichen Kreislaufs. Weltwirtschaftliches Archiv, Band 94 (1965), S. 234-261.

[11] Jorgenson, D.W.: A dual stability theorem. Econometrica, Vol. 28 (196o), S. 892-899.

[12] --- Stability of a dynamic input-output-system. Review of Economic Studies, Vol. 28 (196o/61), S. 1o5-116.

[13] --- Stability of a dynamic input-output-system: a reply. Review of Economic Studies, Vol. 3o (1963), S. 148-149.

[14] Kendrick, D.: On the Leontief Dynamic Inverse. Quarterly Journal of Economics, Vol. 86 (1972), S. 693-696.

[15] Krelle, W.: Das disaggregierte Prognosesystem für die Bundesrepublik Deutschland. Diskussionspapier Nr. 41, Universität Bonn 1972.

[16] --- Vereinfachte Version des disaggregierten Prognosesystems für die Wirtschaft der BRD. Diskussionspapier Nr. 53, Universität Bonn 1973.

[17] Leontief,W.W.: General numerical solution of the simple dynamic input-output-system. In: Report on research for 1953, Harvard Economic Research Projekt.

[18] --- Dynamic analysis. In Leontief, W.W. et al.: Studies in the structure of the American economy. New York 1953.

[19] --- Lags and the stability of dynamic systems. Econometrica, Vol. 29 (1961), S. 659-669.

[2o] --- Lags and the stability of dynamic systems: a rejoinder. Econometrica, Vol. 29 (1961), S. 674-675.

[21] Livesey, D.A.: The singularity problem in the dynamic input-output model. International Journal of Systems Science, Vol. 4 (1972), S. 437-44o.

[22] --- Optimization techniques and theory in the Cambridge growth project and the Leontief dynamic input-output model. Paper contributed to the sixth international conference on input-output techniques, Vienna 1974.

[23] Mathur, P.N.: Output and investment for exponential growth in consumption - an alternative formulation: and derivation of their technological upper limits. Review of Economic Studies, Vol. 31 (1964), S. 73-76.

[24] McManus, M.: Notes on Jorgenson's model. Review of Economic Studies, Vol. 3o (1963), S. 141-147.

[25] Meyer, U.: Mengen, Preise, Einheiten und Spaltensummen in der Input-Output-Analyse. Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft, Band 133 (1977), S. 287-3o4.

[26] --- und Schumann, J.: Das dynamische Input-Output-Modell als Modell gleichgewichtigen Wachstums. Mit einem Anwendungsbeispiel für die Bundesrepublik Deutschland. Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft, Band 133 (1977), S. 1-37.

[27] Morishima, M.: Prices, interest and profit in a dynamic Leontief system. Econometrica, Vol. 26 (1958), S. 358-380.

[28] --- Some properties of a dynamic Leontief system with a spectrum of techniques. Econometrica, Vol. 27 (1959), S. 626-637.

[29] --- Equilibrium, stability, and growth. A multisectoral analysis. Oxford University Press, London 1964.

[30] Mukerji, V.: Output and investment for exponential growth in consumption - the general solution and some comments. Review of Economic Studies, Vol. 31 (1964), S. 77-82.

[31] v. Neumann, J.: Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes. Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, Nr. 8 (1935/36), S. 73-83. Englische Übersetzung: A model of general economic equilibrium. Review of Economic Studies, Vol. 13 (1945/46), S. 10-18.

[32] Nikaido, H.: Convex structures and economic theory. New York-London, 1968.

[33] Petri, P.A.: Convergence and temporal structure in a Leontief dynamic model. In: Bródy, A. und Carter, A.P. (eds.): Input-output-techniques. Proceedings of the fifth international conference on input-output techniques, Geneva, January, 1971. Amsterdam-London 1972.

[34] Preston, R.S.: The Wharton annual and industry forecasting model. Economics Research Unit, Departement of Economics, University of Pennsylvania 1972.

[35] Sargan, J.D.: The instability of the Leontief dynamic model. Econometrica, Vol. 26 (1958), S. 381-392.

[36] --- Lags and the stability of dynamic systems: a reply. Econometrica, Vol. 29 (1961), S. 670-673.

[37] Schumann, J.: Input-Output-Analyse. Berlin-Heidelberg-New York 1968.

[38] Solow, R.M.: Competitive valuation in a dynamic input-output system. Econometrica, Vol. 27 (1959), S. 30-53.

[39] Stone, R. und Brown, J.A.C.: Output and investment for exponential growth in consumption. Review of Economic Studies, Vol. 29 (1962), S. 241-245.

[40] Takayama, A.: Mathematical economics. Hinsdale/Ill. 1974.

[41] Tsukui, J.: Application of a turnpike theorem to planning for efficient accumulation: An example for Japan. Econometrica, Vol. 36 (1968), S. 172-186.

[42] --- Optimal path in a non-linear dynamic input-output system - a generalization of the turnpike model. In: Bródy, A. und Carter, A.P. (eds.): Input-output-techniques. Proceedings of the fifth international conference on input-output techniques, Geneva, January, 1971. Amsterdam-London 1972.

[43] Volkonsky, V.: On a possibility of discount rate determination by intersectoral models. Paper contributed to the sixth international conference on input-output techniques, Vienna 1974.

[44] Wurtele, Z.: A note on some stability properties in Leontief's dynamic models. Econometrica, Vol. 27 (1959), S. 672-675.

Lebenslauf

Am 28. März 1944 wurde ich als Sohn des Studiendirektors Alfred Meyer und seiner Ehefrau Grete Meyer, geb. Weber, in Konitz/Westpr. als viertes von fünf Kindern geboren.

Von 195o bis 1954 besuchte ich in Duisburg die Volksschule und anschließend das Landfermann-Gymnasium bis zu meiner Reifeprüfung im Jahre 1963.

Nach Ableistung von zwei Jahren Militärdienst nahm ich 1965 an der Westfälischen Wilhelms-Universität in Münster/Westf. das Studium der Mathematik auf, das ich 1971 mit dem Diplom abschloß. Anschließend studierte ich, ebenfalls in Münster, Wirtschaftswissenschaften und legte 1973 die Diplomprüfung für Volkswirte ab.

Seit 1971 gehe ich der Tätigkeit eines wissenschaftlichen Assistenten an der Westfälischen Wilhelms-Universität nach, anfangs im Fachbereich Mathematik, seit 1973 im Fachbereich Wirtschafts- und Sozialwissenschaften.